Министерство образования Российской Федерации
САРАПУЛЬСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
филиал
Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е.М.Сухих

Элементы функционального анализа

Задания для самостоятельной работы
для заочного отделения
специальность 120100

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

САРАПУЛ 2005

Содержание курса «Элементы функционального анализа»

1. Введение в математический анализ

1.1. Элементы теории множеств. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции, их графики. Класс элементарных функций.

1.2. Числовые последовательности, их роль в вычислительных процессах. Предел числовой последовательности. Стабилизация десятичных знаков у членов последовательности, имеющей предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности

1.3. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Пределы монотонных функций

1.4. Непрерывность функций в точке. Непрерывность основных элементарных функций.

1.5. Бесконечно малые в точке функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых. –

1.6. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений. .

2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2.1. Понятие функции, дифференцируемой в точке, дифференциал функции и его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функция, ее смысл в прикладных задачах (скорость, плотность). Правила нахождения производной и дифференциала.

2.2. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

2.3. Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение.

2.4. Производные высших порядков.

2.5. Правило Лопиталя

2.6. Формула Тейлора. Представление функций exp(x), sin(x), cos (x), 1n(1+x), $(1+x)^{\alpha}$ по формуле Тейлора.

3. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков

3.1. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке

3.2. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика

3.3. Понятие кривой. Примеры. Уравнение касательной и кривой в данной точке

3.4. Применение математических пакетов Mathcad, Maple, Matlab для исследования функций. Символьные и численные вычисления в математике с помощью программных средств стандартных систем математических вычислений.

4. Функции нескольких переменных

4.1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность

4.2. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Касательная плоскость и нормаль к поверхности..

4.3. Частные производные высших порядков.

4.4. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений..

5. Неопределенный интеграл

5.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования. Использование таблиц интегралов

6. Определенный интеграл

6.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

6.2. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием

7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

7.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (экономика, социология и др.). Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах

7.2. Линейные дифференциальные уравнения, однородные и неоднородные. Понятия общего решения..

7.3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.

8. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

8.1. Нормальная система дифференциальных уравнений. Автономные системы. Векторная запись нормальной системы. Геометрический смысл решения. Фазовое пространство (плоскость), фазовая кривая.

8.2. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

8.3. Системы линейных дифференциальных уравнений, свойства решений. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.-

9. Ряды

9.1. Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов.

9.2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость..

9.3. Функциональные ряды. Степенные ряды.

3.2.Асимптоты

Пример 1.

Найти асимптоты кривой $y = \sqrt[2]{x^3/(x-2)}$

Функция определена в интервалах $(-\infty,0)$ и $(2,\infty)$ Т.к.

$\lim \sqrt[2]{x^3/(x-2)} = \infty$ то прямая x=2 является вертикальной асимптотой кривой

Горизонтальных асимптот кривая не имеет т к $\lim \sqrt[2]{x^3/(x-2)} = \infty$ не являются конечными величинами.

Определим существуют ли наклонные асимптоты. Находим

$$1)\, k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1$$

b $_1$ =

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-k_1x] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1$$

Таким образом существует правая наклонная асимптота y=x+1

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x/(x-2)}{-1}}$$

(разделили числитель и знаменатель на положительную величину –x)т. е.

$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = -1$ b $_2$ =

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-k_2x] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x-2}} =$$

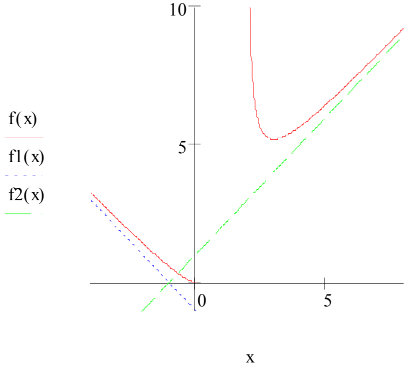
$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{-x}-\sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}} = -1$$

И так существует левая наклонная асимптота y=-x-1

$$f(x) := \sqrt{\frac{x^3}{(x-2)}}$$

$$f1(x) := -x - 1$$

$$f2(x) := x + 1$$



3.2.Исследование функции

Пример 2. Построить график функции y= $\dfrac{x^3+4}{x^2}$

1)Область определения - вся ось Ох за исключением точки x=0

Т.е. D(y)= $(\infty,0)\cup(0,\infty)$

2) Функция не является четной или нечетной.

3) Найдем точки пересечения графика с осью Ох , имея $\dfrac{x^3+4}{x^2}$ =0, x $= -\sqrt[3]{4}$

4) Точка разрыва x=0 причем $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ следовательно x=0 является вертикальной асимптотой графика

Найдём наклонную асимптоту

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

наклонная асимптота имеет уравнение y=x.

5) найдем экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания

Имеем $y' = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3; y' = 0$ при x=2 $y' = \infty$ при x=0 (точка разрыва функции). x=0 и x=2 разбивают числовую ось на промежутке $(-\infty,0)`.(0,2)$ и $(2,+\infty)$. Причем y`>0 в промежутках $(-\infty,0)`.(2,+\infty)$ функция

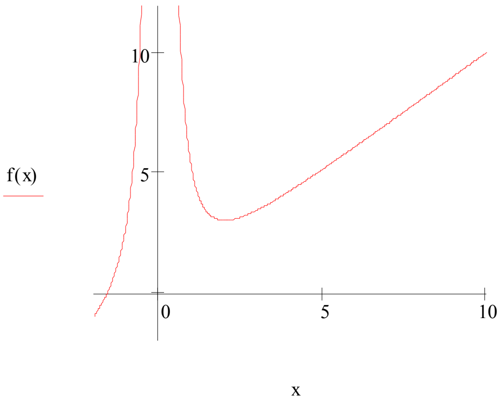
возрастает и $y' < 0$ в промежутке (0,2)(функция убывает)

Далее находим $y'' = 24/x^4$ $y'' = (2) > 0$ следует , x=2- точка минимума ymin=3

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точке её перегиба .

Т.к. $y'' > 0$ то график функции всюду вогнут . Точек перегиба кривая не имеет

Используя полученные данные строим график .



Пример 3. Построим график функции $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

1) Область определения – вся ось Ох т.е. D(y)=$\left(-\infty,+\infty\right)$
2) Функция не является четной или нечетной.
3) Точка пересечения с осями координат: если x=0 то, y=1; если y=0 то x=1
4) Точек разрыва и вертикальных асимптот нет. Имеем

k=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$

b=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\,x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0$

Итак наклонная асимптота y=-x

5) Находим $y'=-x^2\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)}^{2}$; $y'=0$ при x=0 $y'=\infty$ прих=1. В окрестности критических точек производная не меняет знака, экстремумов нет .Т.к. $y'<0$ при всех $x\neq 0$ то функция убывает на всей числовой оси

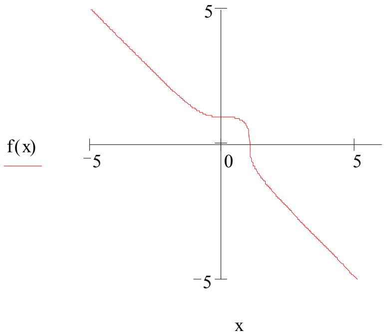
6) Находим $y''=-2x\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)}^{5}$; $y''=0$ при x=0 $y''=\infty$ при x=1 $y''\left(-h\right)<0$

$y''\left(-h\right)<0$ $y''\left(1+h\right)>0$ Следовательно в промежутках $\left(-\infty,0\right)$ и $\left(1,+\infty\right)$

кривая вогнута а в промежутках (0,1) – выпукла.

Точка перегиба имеет координаты (1,0) и (0,1)

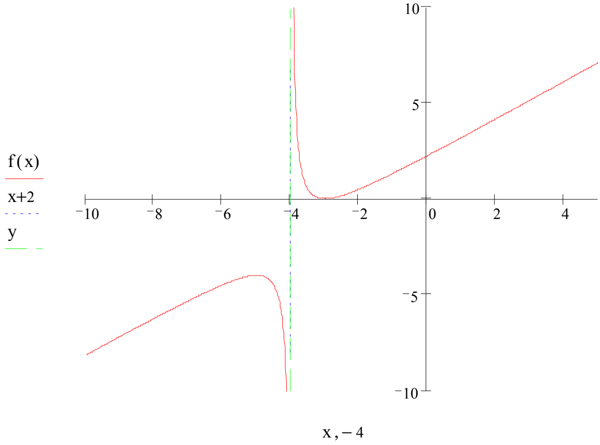
Используя полученные данные строим искомый график



Пример 4

Постройте график и проверьте построение аналитическим и исследованием для функции

Выполнение. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$



Найдем точки пересечения с осями координат
2

f (0) = 2.25 $\qquad \dfrac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{x + 4} = 0 \qquad$ x=-3

График функции пересекает ось ординат в точке y = 2.25, а ось абсцисс - в точке x =-3
Найдем наклонную асимптоту графика

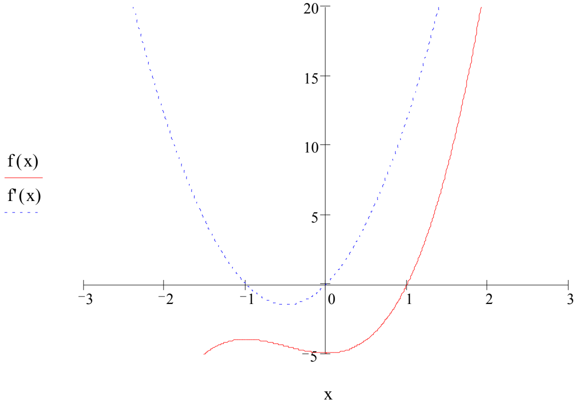
График функции ИМЕЕТ НАКЛОННУЮ АСИМПТОТУ y = x + 2
Исследуем поведение функции в окрестности точки x=-4
График функции ИМЕЕТ ВЕРТИКАЛЬНУЮ АСИМПТОТУ x = -4
так как функция имеет, в этой точке бесконечный разрыв (бесконечно большая в точке

Пример выполнения задания 5
Постройте график и подтвердите построение аналитическим исследованием для функции
f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 5$.

Найдем стационарные точки: решим уравнение
Вычислим значения функции в стационарных точках /f(-1) = -4

f(0) = -5

Точка МАКСИМУМА - точка(-1,-4), точка МИНИМУМА – (0,5)



Пример выполнения задания 6

Постройте график и подтвердите построение аналитическим исследованием для функции

$$:= -\left(\frac{\qquad}{\;+\ 2}\right)^2$$

Найдем стационарную точку функции

$f'(x) = 0$ **x=0**

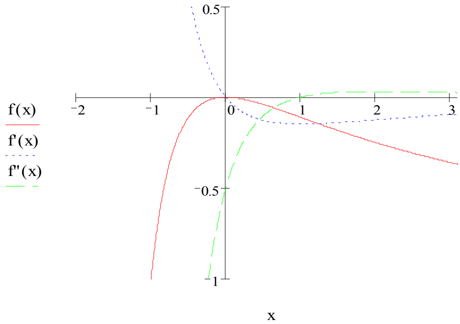
Найдем нули второй производной

$f''(x) = 0$ **x=1**

Вычислим значение функции в точках $x = 0$ $x = 1$

$f(0) = 0$ $f(1) = -0.111$

Точка МАКСИМУМА- (0, 0), точка ПЕРЕГИБА- (1, -0.111)



Пример выполнения задания 7

Постройте график функции $:= \sqrt[3]{2\cdot \quad + 3}$ и подтвердите изображение аналитическим исследованием.
Найдем производные первого и второго порядка

График ПЕРЕСЕкает ОСЬ ОРДИНАТ в точке x = 0, а ОСЬ АБСЦИСС - в точках x = 0 и x = 3
Найдем наклонную асимптоту графика функции

k=$\lim \frac{f(x)}{x} = 1$ b $:=$ $\lim(f(x) - x) = 1$

НАКЛОННАЯ АСИМПТОТА y = x + 1

Найдем стационарную точку функции

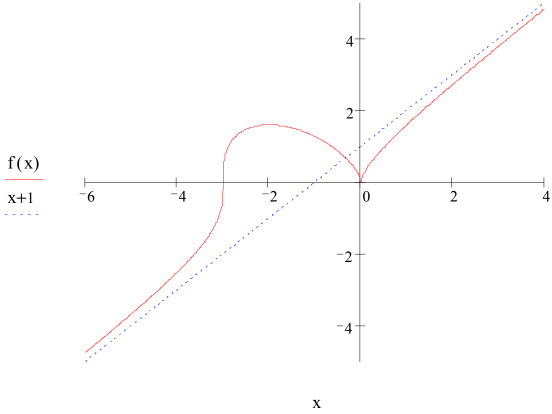
f(x) = 0 x=-2 $f''(-2) = -0.794$ $f(2) = 1.587$

Точка (-2, f(-2)) -ТОЧКА МИНИМУМА функции

Найдем нули второй производной

$f''(x) = 0$

Вторая производная НЕ ИМЕЕТ НУЛЕЙ



4.Функции нескольких переменных

Пример 1. Найти область определения функции:

$$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Решение

Данная функция имеет действительные значения, если выполняются одновременно два неравенства:

$$\begin{cases} x + y > 0; \\ 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -y; \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Первое неравенство $x > -y$ задает часть плоскости, лежащую выше прямой $x = -y$. Второе неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$ задает внутренность круга, единичного радиуса (R = 1) с центром в начале координат. Пересечение этих областей дает искомую часть области:

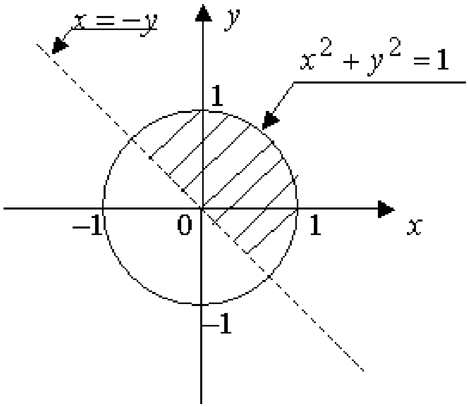


Рис. 3.1

При этом окружность входит в область, это показано сплошной линией. Прямая в область определения функции не входит, что показано на рис. пунктирной линией.

Ответ: $$D(z) = \begin{cases} x > -y; \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Пример 2. Дано $z = uv + u^2 + v^2$; $u = xy$; $v = y \cdot \mathrm{tg}\, x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение

Функция z - сложная, так как $z = z(u, v)$; $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v + 2u; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{\cos^2 x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u + 2v; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{tg}\, x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (v + 2u)y + (u + 2v)\frac{y}{\cos^2 x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (v + 2u)x + (u + 2v)\mathrm{tg}\, x.$$

Ответ: $$\frac{\partial z}{\partial x}=(\mathrm{tg}x+2x)y^2+(x+2\,\mathrm{tg}x)\frac{y^2}{\cos^2 x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\mathrm{tg}x+2x)xy+(x+2\mathrm{tg}x)y\cdot\mathrm{tg}x.$$

Пример 3. Дана функция $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$. Проверить, выполняются ли соотношения:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение

1) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]'_x=\frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{2x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left[\frac{2x}{x^2+y^2}\right]'_y=2x\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_y=2x(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=$$

$$=\frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2y=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[\ln(x^2+y^2)\right]'_y=\frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Подставим полученные производные в указанное соотношение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

$\Rightarrow$ соотношение выполняется.

2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[\frac{2x}{x^2+y^2}\right]_x'=\frac{2x_x'\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right]_y'=\frac{2y_y'\cdot\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\cdot\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2}\equiv 0$$

$\Rightarrow$

соотношение выполняется.

Ответ: соотношения 1) и 2) выполняются.

Пример 4. Найти точки экстремума функции: $z = x^3 - 3x + y^2 + 6y + 16$.

Решение

Найдем стационарные точки функции. Для этого сначала найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0; \\ 2y + 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1; \\ y = -3; \end{cases}$,

находим стационарные точки $P_1(1, -3)$, $P_2(-1, -3)$.

Выясним, достигает ли в них заданная функция экстремум. Находим значения вторых производных в точке P_1:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3x^2 - 3\right)'_x = 6x, \Rightarrow \quad A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 6;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2y+6)'_y = 2, \Rightarrow \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2-3)'_y = 0, \Rightarrow \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = 0.$$

Вычислим $\Delta = AC - B^2 = 12 > 0$ - функция в точке P_1 имеет экстремум. Так как $A = 6 > 0$, то в точке P_1 функция z имеет минимум: $z_{\min}(1, -3) = 5$.

Аналогично проводятся исследования для точки $P_2(-1, -3)$:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = -6; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = 2; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = 0;$$

$\Delta = -12 - 0 = -12 < 0$ - экстремума в точке $P_2(-1, -3)$ нет.

Ответ: $z_{\min}(1, -3) = 5.$

5.НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

.

1. Найти первообразные функций

1.1 $f(x) = x^2$

Решение: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ - первообразная.

Проверка: $F'(x) = (\dfrac{x^3}{3} + C)' = x^2$

1.2 $f(x) = e^x + \dfrac{3}{\lambda} + \cos x$

Решение: Область определения $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$

Первообразная $F(x) = e^x + 3\ln|x| + \sin x + C$, $F'(x) = f(x)$

2. Используя прием – непосредственное интегрирование, то есть используя тождественные преобразования подынтегральных выражений, применяя свойства неопределенного интеграла и основные функции интегрирования, найти интегралы.

2.1 $\int(2x^6 + 3\dfrac{1}{\lambda} + 5e^x - 4)dx$

Решение:

$$\int(2x^6 + 3\frac{1}{\lambda} + 5e^x - 4)dx = 2\int x^6 dx + 3\int\frac{dx}{x} + 5\int e^x dx -$$

$$4\int dx = \frac{2}{7}x^7 + 3\ln|x| + 5e^x - 4x + C$$

Проверка:

$$\left(\frac{2}{7}x^7 + 3\ln|x| + 5e^x - 4x + C\right)' = 2x^6 + \frac{3}{x} + 5e^x - 4$$

2.2 $\int\left(3^x + 2\cos x + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$

Решение:

$$\int\left(3^x+2\cos x+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int 3^x dx+2\int\cos x dx+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{3^x}{\ln 3}+2\sin x+\frac{1}{5}\cdot arctgx+C$$

2.3 $\int\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\cos^2 x}+6shx\right)dx$

Решение:

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\cos^2 x}+6shx\right)dx=5\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+2\int\frac{dx}{\cos^2 x}+6\int shxdx=5\arcsin x+2tgx+6chx+C$$

2.4 $\int\left(\frac{5}{x^2-9}+\frac{7}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{4}{\sin x}+\frac{3}{ch^2 x}\right)dx$

Решение:

$$\int\left(\frac{5}{x^2-9}+\frac{7}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{4}{\sin x}+\frac{3}{ch^2 x}\right)dx=5\int\frac{dx}{x^2-3^2}+7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}+4\int\frac{dx}{\sin x}+3\int\frac{dx}{ch^2 x}=$$

$$=5\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+7\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+4\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+3thx+C$$

2.5 $\int\left[\left(2+3x^2\right)^5 x+4tgx+e^{2\sin x}\cdot\cos x\right]dx$

Решение:

$$\int\left[\left(2+3x^2\right)^5 x+4tgx+e^{2\sin x}\cdot\cos x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\left(2+3x^2\right)^5 d\left(2+3x^2\right)-4\int\frac{d\cos x}{\cos x}+\frac{1}{2}\int e^{2\sin x}d\left(2\sin x\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(2+3x^2\right)^6-4\ln|\cos x|+\frac{1}{2}e^{2\sin x}+C$$

3. С помощью соответствующей замены переменной интегрирования, найти интегралы

3.1 $\int\frac{2dx}{1+3\sqrt{x}}$

Решение: замена x=t^2, dx=2dt

$$\int\frac{2dx}{1+3\sqrt{x}}=\frac{4}{3}\int\frac{3tdt}{1+3t}=\frac{4}{3}\int\frac{1+3t}{1+3t}dt-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{1+3t}=\frac{4}{3}\int dt-\frac{4}{9}\int\frac{d(1+3t)}{1+3t}=$$

$$=\frac{4}{3}t-\frac{4}{9}\ln|1+3t|+C=\frac{4}{3}\left[\sqrt{x}-\frac{1}{3}\ln|1+3\sqrt{x}|\right]+C$$

3.2 $\int \frac{3xdx}{x^4+2}$

Решение: Подстановка $x^2=t$, $2xdx=dt$, $xdx = \frac{1}{2}dt$

$$\int \frac{3xdx}{x^4+2} = 3\int \frac{xdx}{\left(x^2\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{3\sqrt{2}}{4} arctg\frac{x^2}{\sqrt{2}} + C$$

3.3 $\int \frac{5\sqrt{2+3\ln x}}{x}dx$

Решение: Подстановка $2+3\ln x=t$, тогда $3\frac{dx}{x} = dt$, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}dt$;

$$\int \frac{5\sqrt{2+3\ln x}}{x}dx = \frac{5}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2} + C = \frac{10}{9}\sqrt{\left(2+3\ln x\right)^3} + C$$

4. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы

4.1 $\int (x+1)\cos 2xdx$

Решение: Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int (x+1)\cos 2xdx = \left| \begin{matrix} u = x+1; & du = dx \\ dv = \cos 2xdx; & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = (x+1)\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

4.2 $\int (x+2)e^{3x}dx$

Решение: Интегрируем по частям

$$\int (x+2)e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x+2; & du = dx \\ dv = e^{3x}dx; & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = (x+2)\cdot\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x+2)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

4.3 $\int (x+3)\ln xdx$

Решение: Интегрируем по частям

$$\int (x+3)\ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x+3)dx; & v = \frac{x^2}{2} + 3x \end{matrix} \right| = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 3x + C$$

4.4 $\int (x+5)arctgxdx$

Решение:

$$\int (x+5) arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = (x+5)dx & v = \dfrac{x^2}{2} + 5x \end{matrix} \right| = arctgx\left(\frac{x^2}{2}+5x\right) - \int \frac{\frac{x^2}{2}+5x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+5x\right) arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x dx}{1+x^2} = \left(\frac{x^2}{2}+5x\right) arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1 dx}{1+x^2} - \frac{5}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+5x+\frac{1}{2}\right) arctgx - \frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ln(1+x^2) + C$$

4.5 $\int \frac{x^2}{2} e^x dx$

Решение:

$$\int \frac{x^2}{2} e^x dx = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{x^2}{2} & du = xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} e^x - \int e^x x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} e^x - xe^x + e^x + C = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) e^x + C$$

5. Вывести рекуррентную формулу для нахождения интеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (n – натуральное число, n >1) и, применяя ее, найти интеграл.

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Решение: $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $I_{n-1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}$

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int x \cdot \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n} & v = -\dfrac{1}{2(n-1)} \cdot \dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{a^2}\left[x \cdot \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} \right]$$

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - I_{n-1}\right]$$

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

реккурентная формула. $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{1} arctgx + C$

$$I_2 = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2} arctgx + C$$

$$I_3 = \frac{x}{2\cdot 2\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2} arctgx + C\right] =$$

$$= \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8} arctgx + C$$

6. найти интегралы от функций, которые относятся к четырем типам простейших (элементарных) дробей:

а) $\frac{A}{x-a}$, б) $\frac{A}{(x-a)^m}$ (m – целое, m >1), в) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$,($\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$), г) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, (n – целое, n >1).

6.1 $\int \frac{2dx}{x-3} = 2\int \frac{d(x-3)}{x-3} = 2\ln|x-3| + C$

6.2 $\int \frac{3dx}{\left(x-5\right)^8} = -\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\left(x-5\right)^7} + C$

6.3

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - 5\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5} = \ln\left(x^2+4x+5\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = arctg\,(x+2)+C$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right) - 5arctg\,(x+2)+C$$

6.4 $\int \frac{3x+1}{(x^2+4x+5)^3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^3}\,dx - 5\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3}$

$$\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^3}\,dx = \int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{(x^2+4x+5)^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}+C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3} = \int \frac{d(x+2)}{\left[(x+2)^2+1\right]^3} = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3} = \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3t}{8\left(t^2+1\right)} + \frac{3}{8}arctgt + C =$$

$$= \frac{x+2}{4\left[(x+2)^2+1\right]^2} + \frac{3(x+2)}{8\left[(x+2)^2+1\right]} + \frac{3}{8}arctg\,(x+2)+C$$

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+4x+5)^3}\,dx = -\frac{3}{4(x^2+4x+5)^2} - \frac{5}{4}\frac{x+2}{\left[(x+2)^2+1\right]^2} - \frac{15}{8}\frac{x+2}{\left[(x+2)^2+1\right]^2} - \frac{15}{8}arctg\,(x+2)+C$$

7. Найти интеграл от заданной рациональной дроби.

$$\cdot\int \frac{x^4-2x^3+17}{x^4-2x^3-8x+16}\,dx$$

Решение: Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть данной дроби:

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x^3+\qquad 17 & x^4-2x^3-8x+16 \\ \cline{2-2} & 1 \\ \underline{-x^4-2x^3-8x+16} & \\ \qquad\qquad 8x+1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+17}{x^4-2x^3-8x+16}\,dx = \int\left(1+\frac{8x+1}{x^4-2x^3-8x+16}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{8x+1}{x^4-2x^3-8x+16}\,dx = x + \int \frac{8x+1}{x^4-2x^3-8x+16}\,dx$$

Размножим знаменатель дроби на действительные множители.

$$x^4-2x^3-8x+16 = x^3(x-2)-8(x-2) = (x-2)(x^3-2^3) = (x-2)^2(x^2+2x+4)$$

Тогда, согласно формуле размножения правильной рациональной дроби на простейшие, имеем:

$$\frac{8x+1}{x^4-2x^3-8x+16}=\frac{8x+1}{(x-2)^2(2x^2-2x+4)}=$$

$$\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+4}$$

Коэффициенты A, B, M и N найдём методом неопределенных коэффициентов. Приведя правую часть к общему знаменателю и приравнивая знаменатели, получим:

$8x+1=A(x^2+2x+4)+B(x-2)(x^2+2x+4)+(Mx+N)(x-2)^2$

$8x+1=A(x^2+2x+4)+B(x^3-8)+M(x^3-4x^2+4x)+N(x^2-4x+4)$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & B+M=0 \\ x^2 & A-4M+N=0 \\ x & 2A+4M-4N=8 \\ x^0 & 4A-8B+4N=1 \end{array}$$

$$A=\frac{17}{12};B=-\frac{1}{24};M=\frac{1}{24};N=-\frac{5}{4}$$

$$\frac{8x+1}{x^4-2x^3-8x+16}=\frac{17}{12}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{x-30}{x^2+2x+4}$$

$$\int\frac{8x+1}{x^4-2x^3-8x+16}dx=\frac{17}{12}\int\frac{1}{(x-2)^2}dx-\frac{1}{24}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{1}{24}\int\frac{x-30}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=-\frac{17}{12}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{24}\ln|x-2|+\frac{1}{48}\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}-\frac{31}{24}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

8. Найти интеграл от рациональных функций.

.

8.1. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

Решение: Решаем интеграл с помощью подстановки:

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$$

n=2, α=1, β=γ=0, δ=1, $\sqrt{x}=t$

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{2\left(x+\sqrt{x}\right)}=\int\frac{t\cdot 2tdt}{2(t^2+t)}=\int\frac{tdt}{t+1}=\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=\int dt-\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=t-\ln|t+1|+C=\sqrt{x}-\ln|\sqrt{x}+1|+C$$

8.2 $\int\frac{2\left(x+\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

Решение: подстановка

$\sqrt[3]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$, где S – общий знаменатель $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ α=1, β=1, γ=0, δ=1,

$\sqrt[6]{1+x}=t$, $1+x=t^6$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$

$$\int\frac{2\left(x+\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\int\frac{2\left(t^6-1+t^3\right)}{t^2}6t^5dt=12\int\left(t^9+t^6-t^3\right)dt=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=12t^4\left(\frac{t^6}{10}+\frac{t^3}{7}+\frac{1}{4}\right)+C=12\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C$$

8.3 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\ln\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C$$

8.4 $\int\frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+2x+5}}dx$

Решение:

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+2x+5}}dx=2\int\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}}+\frac{7}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}}=$$

$$x+\frac{1}{3}=t$$

$$=2\int\frac{tdt}{\sqrt{3t^2+\frac{14}{3}}}+\frac{7}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{3t^2+\frac{14}{3}}}=\frac{2}{3}\int\frac{d\left(3t^2+\frac{14}{3}\right)}{2\sqrt{3t^2+\frac{14}{3}}}+\frac{7\sqrt{3}}{9}\int\frac{d\left(\sqrt{3}t\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2+\frac{14}{3}}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3t^2+\frac{14}{3}}+\frac{7\sqrt{3}}{9}\ln\left|\sqrt{3}t+\sqrt{3t^2+\frac{14}{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}+\frac{7\sqrt{3}}{9}\ln\left|\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+2x+5}+\frac{7\sqrt{3}}{9}\ln\left|\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\sqrt{3x^2+2x+5}\right|+C$$

8.5 $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$

Решение: подстановка $\frac{1}{x-\alpha}=t$

$\alpha=0$, $\frac{1}{x}=t,\ x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+3}}=-\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+4}}=$$

$$=-\ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)^2+4}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+4}\right|+C$$

8.6 $\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$

Решение: $\sqrt{x^2+x+1}$

a=1, b=1, c=1

подстановка Эйлера c=1,>0

$\sqrt{x^2+x+1}=tx+1$

Подстановка Эйлера:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}x$, если $a>0$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm tx\pm\sqrt{c}$, если $c>0$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\left(x-x_1\right)$ или

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\left(x-x_2\right)$, где x_1 и x_2 – различные действительные корни ax^2+bx+c.

Знаки могут быть любые

В данном интеграле $x^2+x+1=t^2x^2+2tx+1$

$$x=\frac{2t-1}{1-t^2},\ dx=2\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-t+1}{1-t^2},\ t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

$$\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{2tdt}{t^2-1}=\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{t^2-1}=\ln\left|t^2-1\right|+C=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right)^2\right|+C$$

8.7 $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

Решение: Интеграл от дифференциального бинома

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^P dx$, $m=-4,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2},\ a=1,\ b=1.$

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2-$ целое число, подстановка $\sqrt[S]{\frac{a+bx^n}{x^n}}=t$, где S – знаменатель P.

$S=2,\ a=1,\ b=1,\ n=2,\ \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=t$

$x^{-2}+1=t^2,\ -2x^{-3}dx=2tdt,\ x^{-3}dx=tdt$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-4}\left[x^2\left(x^{-2}+1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-5}\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$\int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\int\left(t^2-1\right)t^{-1}\cdot tdt=-\int\left(t^2-1\right)dt=t-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C=$$

$$=\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$$

9. Найти интеграл от выражений, содержащих тригонометрические и гиперболические функции

9.1 $\int\frac{dx}{\sin^2 x(\cos x-2\sin x+2)}$

Решение: универсальная подстановка

$$tg\frac{x}{2}=t,\ -\pi<x\le\pi$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},x=2arctgt;dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x(\cos x-2\sin x+2)}=\int\frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+2\right)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^4-4t^3+3t^2}dt$$

Выделим целую часть подынтегральной функции.

$$\begin{array}{l|l} t^4\qquad +2t^2+1 & t^4-4t^3+3t^2 \\ \cline{2-2} \underline{t^4-4t^3-3t^2} & 1 \\ \quad 4t^3-t^2+1 & \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^4-4t^3+3t^2}dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{4t^3-t^2+1}{t^4-4t^3+3t^2}dt$$

Разложим $\frac{4t^3-t^2+1}{t^4-4t^3+3t^2}$ на простейшие

$$t^4-4t^3+3t^2=t^2\left(t^2-4t+3\right)=t^2(t-3)(t-1)$$

$$\frac{4t^3-t^2+1}{t^4-4t^3+3t^2}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{C}{t-3}+\frac{D}{t-1}$$

Приведём правую часть к общему знаменателю и приравняем числители.

$$4t^3-t^2+1=A(t-3)(t-1)+Bt(t-3)(t-1)+Ct^2(t-1)+Dt^2(t-3)$$

Коэффициенты A, B, C, D найдём при помощи сочетания метода неопределенных коэффициентов.

$$\begin{array}{l|l} t=0 & 1=3A \\ t=3 & 108=18C \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ C=6,\ D=-3 \\ t=1 & 6=-2D \end{array}$$

Приравнивая коэффициенты при t^3 левой и правой частей, имеем 4=B+C+D $\Rightarrow$ B=1

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x(\cos x-2\sin x+2)}=\frac{t}{2}+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+3\int\frac{dt}{t-3}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln|t|+3\ln|t-3|-\frac{3}{2}\ln|t-1|+C=$$

$$=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+3\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right|-\frac{3}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+C$$

9.2. Найти интеграл $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$

Решение $\int\sin^m x,\cos^n xdx$

Подстановки

Если m – нечётное, положительное, cosx=t

Если n – нечётное положительное, sinx=t

Если m+n – чётное отрицательное, tgx=t

Если m и n – чётные неотрицательные, то используют формулы понижения степени.

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right),\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

m=2, n=4 – чётные положительные.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

9.3 $\int \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos\frac{1}{3}x dx$

Решение: Применяем тригонометрические формулы

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(ax+bx) + \sin(ax-bx)\right]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax+bx) + \cos(ax-bx)\right]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax-bx) - \cos(ax+bx)\right]$$

$$\int \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos\frac{1}{3}x dx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x\right)\right] = \frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{6}x$$

$$\int \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos\frac{1}{3}x dx = \frac{1}{2}\int \sin\frac{5}{6}x dx + \frac{1}{2}\int \sin\frac{1}{6}x dx =$$

$$= -\frac{3}{5}\cos\frac{5}{6}x - 3\cos\frac{1}{6}x + C$$

9.4 $\int \frac{dx}{(chx - shx)shx}$

Решение: Гиперболические функции

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Подстановка $th\frac{x}{2} = t$

$$shx = \frac{2t}{1-t^2}, chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

$$\int \frac{dx}{(chx - shx)shx} = \int \frac{1}{\left(\frac{1+t^2}{1-t^2} - \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2t}{1-t^2}} \cdot \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{(1-t^2)dt}{(1-t)^2 t} = \int \frac{1+t}{(1-t)t} dt =$$

$$= \int \frac{1-t+2t}{(1-t)t} dt = \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{d(t-1)}{t-1} = \ln|t| - 2\ln|t-1| + C = \ln\left|th\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|th\frac{x}{2} - 1\right| + C$$

Замечание: при преобразовании интегралов используются формулы

$$ch^2x - sh^2x = 1,\ ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x+1),$$

$$sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x-1),\ \ shx\cdot chx = \frac{1}{2}sh2x$$

$$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x},\ ch^2x - 1 = \frac{1}{sh^2x}$$

10. С помощью соответствующей тригонометрической подстановки найти интеграл.

10.1 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$

Решение: Применяются тригонометрические подстановки

$x = a\sin t$ или $x=accost$

$x = atgt$ или $x=actgt$

$x = a\frac{1}{\cos t}$ или $x = a\frac{1}{\sin t}$

Применим $x = a\cos t$, $\cos t = \frac{x}{a}$, $t = \arccos\frac{x}{2}$,

$dx = -a\sin tdt$

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\int\frac{\sqrt{a^2-a^2\cos^2t}}{a^2\cos^2t}a\sin tdt = -\int\frac{\sin^2t}{\cos^2t}dt = -\int\frac{1-\cos^2t}{\cos^2t}dt = \int\left(1-\frac{1}{\cos^2t}\right)dt =$$

$$= \int dt - \int\frac{dt}{\cos^2t} = t - tgt + C = t - \frac{\sin t}{\cos t} + C = t - \frac{\sqrt{1-\cos^2t}}{\cos t} + C = \arccos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\frac{x}{a}} + C$$

6.ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11. вычислить определенные интегралы.

11.1 $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

Решение:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = ctg\frac{\pi}{6} - ctg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

11.2 $\int\limits_{1}^{l} \frac{\ln^3 x}{x} dx$

Решение: подстановка $x = e^t, dx = e^t dt$

$$\int\limits_{1}^{l} \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int\limits_{0}^{1} t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

11.3 $\int\limits_{1}^{2} xe^x dx$

Решение: интегрирование по частям

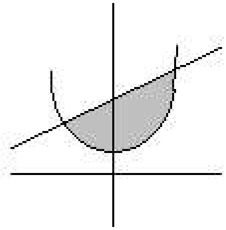
$$\int\limits_{1}^{2} xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x \Bigg|_{1}^{2} - \int\limits_{1}^{2} e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

12. вычислить площадь плоских фигур (областей), заданных в 12.1 кривыми, заданных в декартовых прямоугольных координатах: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$, $x = a$, $x = b$), 12.2 ограниченной параметрически заданной кривой: $x = \varphi(t)$, $y = x(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 12.3 ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах: $r = f(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta, \varphi = \alpha, \varphi = \beta$)

12.1 Вычислить площадь $y = x^2 + 1, y = x + 3$

Найти абсциссы точек пересечения.

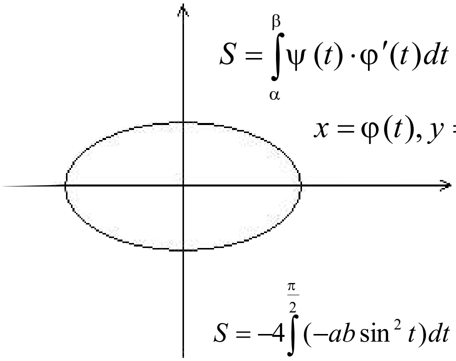


$$x^2+1=x+3$$

$$x^2-x-2=0,\ x_1=-1,\ x_2=2$$

$$S=\int_{-1}^{2}\left[(x+3)-(x^2+1)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}\ \text{кв.ед.}$$

12.2 Вычислить площадь $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} 0\le t\le 2\pi$



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$$

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\alpha\le t\le\beta$$

$$S=-4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-ab\sin^2 t)dt=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=$$

$$=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=4ab\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{0}^{\pi/2}=\pi ab\ \text{кв.ед.}$$

12.3 $r=a^2\sin 2\varphi$

Решение: $\varphi=\alpha,\varphi=\beta,r=r(\varphi)$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi\ ;$$

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin 2\varphi d\varphi=\frac{1}{4}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi d(2\varphi)=$$

$$=\frac{a^2}{4}\cos 2\varphi\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{1}{4}a^2\Rightarrow S=a^2\ \text{кв.ед.}$$

13. вычислить длины дуг кривых, заданных в 13.1 в декартовых прямоугольных координатах: y = f(x), $a \le x \le b$, 13.2 параметрически: x = x(t), y = y(t), $t_0 \le t \le t_1$, 13.3 в полярных координатах: r = r(φ), $\alpha \le \varphi \le \beta$.

13.1 Вычислить длину дуги.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) \quad A(0,a) \quad B(b,y)$$

Решение: перепишем уравнение в виде

$$y = ach\frac{x}{2}$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + b'^2(x)}dx$$

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + ch^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^b \sqrt{ch^2\frac{x}{a}}dx = \int_0^b ch\frac{x}{a}dx = a\int_0^b ch\frac{x}{a}d\left(\frac{x}{a}\right) = ash\frac{x}{a}\Big|_0^b =$$

$$= a\left(sh\frac{b}{a} - sh0\right) = ash\frac{b}{a}\ лин.ед.$$

13.2

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} 0 \le t \le 2\pi$$

Решение: длина дуги функции, заданной параметрически:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3a\cos^2 t)^2 \cdot \sin^2 t + (3a\sin^2 t)\cos^2 t}dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t}dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$

$$S = \frac{3}{2}a \cdot 4 = 6a \text{ лин.ед.}$$

13.3 *r=2a(1-cosφ)*

Решение:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$$

$$S=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2(1-\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}d\varphi=$$

$$=8a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-16a\cos\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=16a \text{ лин.ед.}$$

14. вычислить площадь и объём заданных соответственно поверхности вращения полученной вращением дуги кривой y = f(x), $a \le x \le b$ вокруг оси O_x, и тела вращения, ограниченного этой поверхностью и плоскостями x = a и x = b.

Вычислить площадь поверхности вращения:
$y=\sqrt{x}, 0\le x\le 3$ и объём x=3

Решение: $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f_x'^2(x)}dx \quad f(x)\ge 0$

$$S=2\pi\int_0^3\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{4x+1}dx=\frac{\pi}{6}\sqrt{(4x+1)^3}\Bigg|_0^3=\frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13}-1\right)\text{кв.ед.}$$

Объём $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx,$

$$V=\pi\int_0^3\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^3 xdx=\frac{\pi}{2}x^2\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}\pi \text{ куб.ед.}$$

15. Вычислить работу заданной силы F(x) на участке $[x_0;x]$ прямолинейного пути, пройденном точкой под действием силы.
c=0,5 кг/см $x_б$=3см, x_1=7см.
F_x=-cx
Решение:

$$A=\int_{x_0}^{x_1}F_x(x)dx=-c\int_3^7 xdx=-c\frac{x^2}{2}\Bigg|_3^7=-\frac{0.5}{2}\left(7^2-3^2\right)=-10$$

кг см

16. вычислить несобственные интегралы.

16.1

$$\int_0^{+\infty}\frac{4a^3dx}{x^2+4a^2}$$

Решение:

$$\int_0^{+\infty}\frac{4a^3dx}{x^2+4a^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{4a^3dx}{x^2+(2a)^2}=\lim_{b\to+\infty}\left[2a^2arctg\frac{x}{2a}\Bigg|_0^b\right]=2a^2\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{b}{2a}$$

$$=2a^2\frac{\pi}{2}=\pi a^2$$

16.2

$$\int_0^{+\infty}\sin xdx$$

Решение: $\int_0^{+\infty}\sin xdx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\sin xdx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\cos x\Big|_0^b\right]=\lim_{b\to+\infty}(1-\cos b)$

не существует

16.3

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Решение:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to0}\left[3\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}\right]+\lim_{\varepsilon_1\to0}\left[3\sqrt[3]{x^2}\Big|_{\varepsilon_2}^{1}\right]=3+3=6$$

16.4

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

Решение:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to0}\left[-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}\right]+\lim_{\varepsilon_2\to0}\left[-\frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon_2}\right]=$$

не существует

Интеграл расходится.

7.ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

7.1.1.УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Найти решение задачи
(пример 1 стр. 419 С.В. Шипачев)

Рассмотрим уравнение $y' = 3x^2$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка. Оно удовлетворяет всем условиям теоремы Коши, т.к. функции $f(x,y) = 3x^2$ и $f'_y(x,y) = 0$ определены и непрерывны на всей плоскости ОХУ. Легко проверить, что функция $y = x^3 + C$, где C – произвольная постоянная, является общим решением данного уравнения во всей плоскости ОХУ.

При различных значениях постоянной C получаем различные решения данного уравнения. Например, если

$C = 0$, то $y = x^3$, если $C = -1$, то $y = x^3 - 1$, если $C = 2$, то $y = x^3 + 2$, и т.д.

Для решения какой-нибудь задачи Коши, т.е. отыскания частного решения, зададим произвольные начальные условия: $x = x_0$, $y = y_0$.

Подставляя эти значения в общее решение $y = x^3 + C$ вместо x и y,

Получаем $y_0 = x_0^3 + C$, откуда $C = y_0 - x^3$. Таким образом, найдено частное решение $y = x^3 + y_0 - x_0^3$.

Задача 1.

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad y(1) = 2$$

,

<u>Решение:</u>

$y' = \dfrac{dy}{dx}$: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$,

разделяем переменные

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

или

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c, \ y = \frac{c}{x},$$

где $c =$ c_1 – общее решение.

$2 = \dfrac{c}{1}$, $c = 2$,

$y = \dfrac{2}{x}$ - частное решение.

7.2.1. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, однородное уравнение может быть приведено к виду $y^k = j\left(\dfrac{y}{x}\right)$. С помощью подстановки $y = tx$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции t.

Пример

Найти общий интеграл уравнения:

$$\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$$

Здесь $P(x, y)x^2 + 2xy$, $Q(x, y) = xy$. Обе функции однородные второго измерения. Введем подстановку $y = tx$, откуда $dy = xdt + tdx$.

Тогда уравнение примет вид:

$$\left(x^2+2x^2t\right)dx+tx^2(xdt+tdx)=0\,,$$ или

$$\left(x^2+2x^2t+t^2x^2\right)dx+tx^3dt=0$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{(t+1)^2}=0\,;\ \int\frac{dx}{x}+\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=C.$$

Преобразуем второй интеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt=C\,;\text{ или }\ln|x|+\ln(t+1)\frac{1}{t+1}=C.$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции $y(t=y(x))$,

Получаем окончательный ответ:

$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C$$

Пример 542Д. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(x^2+2xy)dx+xydy=0$$

Здесь $P(x;y)=x^2+2xy$, $Q(x;y)=xy$.

Обе функции – однородные второго измерения. Введем подстановку $y=tx$, откуда $dy=xdt+tdx$.

$$\left(x^2+2x^2t\right)dx+tx^2(xdt+tdx)=0$$

или

$$\left(x^2+2x^2t+t^2x^2\right)dx+tx^3dt=0$$

Разделяя переменное и интегрируя, имеем

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{(t+1)^2}=0\,;\ \int\frac{dx}{x}+\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=C.$$

Преобразуем второй интеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt=C\,,$$

или

$$\ln|x|+\ln(t+1)\frac{1}{t+1}=C.$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции $y(t=y(x))$, получаем окончательный ответ

$$\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$$

Пример №546(Д). Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$$

Произведем подстановку $\frac{y}{x} = t$, откуда $y = tx$, $dy = xdt + tdx$ В результате получаем $xdt + tdx = (t + \sin t)dx$; $xdt = \sin tdx$;

$$\frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя имеем:

$$\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \ln|x| + \ln C,$$

откуда $\frac{t}{2} = arctg(Cx)$. Производя обратную замену $t = \frac{y}{x}$, находим общее решение исходного уравнения

$$y = 2xarctg(Cx).$$

Задача 2. найти общий интеграл уравнения

$$\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$$

Решение: это – однородное уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где P и Q – однородные функции одного измерения.

$$P(x,y) = x^2 + 2xy,\ Q(x,y) = xy$$

$$y = ux,\ dy = xdu + udx$$

заменяем:

$$\left(x^2 + 2x^2u\right)dx + ux^2\left(xdu + udx\right) = 0$$

или

$$\left(x^2 + 2x^2u + u^2x^2\right)dx + ux^3du = 0$$

$$x^2\left(1 + 2u + u^2\right)dx + ux^3du = 0$$

$$x^2\left(1 + 2u + u^2\right)dx = -ux^3du$$

уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{x^2}{x^3}dx = -\frac{udu}{(1+u)^2}$$

$$\ln|x| = -\int \frac{u+1-1}{(1+u)^2}du = -\int \frac{du}{1+u}\int \frac{du}{(1+u)^2}$$

$$\ln|x| = -\ln|u+1| + \frac{1}{u+1} + c$$

возвращаемся к прежней переменной

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = c$$

7.2.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОДНОРОДНЫМ.

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right)$$

При $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = u + \alpha$, $y = \upsilon + \beta$, где (α, β) – точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + C_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + C_2$.

Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то подстановка позволяет разделить переменные.

№566(Д). Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C}\right)$$

$x = u + \alpha$

$y = \upsilon + \beta \quad y' = \upsilon'$

α, β – подбирают так, чтобы уравнение стало однородным

При мер. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dx = 0$

Уравнение принадлежит к первому типу, поскольку

$$y' = \frac{-2x + y + 1}{x + 2y - 1}$$

и $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Находим точку пересечения прямых $2x + y + 1 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$; имеем $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$.

Производим в исходном уравнении замену переменных, полагая $x = u + \alpha = u - 1$; $y = \upsilon + \beta = \upsilon + 1$; $dx = du$, $dy = d\upsilon$. Уравнение преобразуется к виду:

$$(2u + \upsilon)du + (u + 2\upsilon)d\upsilon = 0$$

В полученном однородном уравнении положим $\upsilon = ut$, откуда $d\upsilon = udt + tdu$; придем к уравнению с разделяющимися переменными:

$$2(t^2 + t + 1)udu + u^2(1 + 2t)dt = 0,$$

Общий интеграл которого есть $u\sqrt{t^2 + t + 1} = C$, или (после замены $t = \dfrac{\upsilon}{u}$ и возведения в квадрат)

$$u^2 + u\upsilon + \upsilon^2 = C^2$$

Возвращаясь к переменным x и y ($u = x + 1; \upsilon = y - 1$), после элементарных преобразований найдем общий интеграл исходного уравнения

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C_1$$

(здесь положено $C_1 = C^2 - 1$)

Пример №567(Д). Найти общий интеграл уравнения

$$(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

Уравнение принадлежит ко второму типу, поскольку

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ Положим поэтому $y + x = t$, $dy = dt - dx$.

Данное уравнение примет вид $(t+2)dx + (2t-1)(dt - dx) = 0$, или $(3-t)dx + (2t-1)dt = 0$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$\int \frac{2t-1}{3-t}dt + \int dx = C$, или $-2t - 5\ln|t-3| + x = -C$

Возвращаясь к старым переменным $(t = x + y)$, получим окончательный ответ: $x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C$.

Решить задачу Коши.

(*пример 1 стр.574, Шнейдер*)

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2 \qquad y|_{X=1} = \frac{1}{2}$

Сначала найдем общее решение. При интегрировании этого уравнения не будем пользоваться готовой формулой, а проделаем все вычисления вновь. Рассмотрим сначала соответственное уравнение без свободного члена $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. В этом уравнении переменные разделяются: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим

$\ln|x| + \ln C_1$, или $y = \pm C_1 x = Cx$

В полученном общем решении этого линейного уравнения без свободного члена заменяем постоянную С функцией $Z(x)$, получаем

$y = z(x)x$

Дифференцируя, находим $y' = z'(x)x + z(x)$. Подставляем в данное $z'(x)x + z(x) = \frac{z(x)x}{x} + x^2$,

или

$z'(x) = x$

Отсюда $z(x)=\frac{x^2}{2}+C_0$ и общее решение данного уравнения имеет вид $y=z(x)=\left(\frac{x^2}{2}+C_0\right)x$, или $y=\frac{x^2}{2}+C_0x$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$y=\frac{1}{2}$ при x = 1:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C_0\cdot 1$;

Следовательно, $C_0=0$ и частное решение запишется в виде

$y=\frac{1}{2}+x^3$

Пример №546Д. Найти решение задачи Коши при начальных условиях

$$y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x} \qquad y(1)=\frac{\pi}{2}$$

Произведем подстановку $\frac{y}{x}=t$, откуда $y=tx$, $dy=xdt+tdx$ В результате получаем $xdt+tdx=(t+\sin t)dx$; $xdt=\sin t dx$; $\frac{dt}{\sin t}=\frac{dx}{x}$

Интегрируя имеем:

$\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right|=\ln|x|+\ln C$, откуда $\frac{t}{2}=arctg(Cx)$

Производя обратную замену $t=\frac{y}{x}$, находим общее решение исходного уравнения $y=2x\,arctg(Cx)$. Используя заданное начальное условие, получим $\frac{\pi}{2}=2\,arctg\;C$; откуда $\mathrm{C}=1$.

Итак, частное решение имеет вид $y=2x\,arctg\,x$.

Задача 3. найти общий интеграл уравнений:

а) $y' = -\dfrac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$

Решение:

уравнение вида

$$y' = \pm\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ приводится к однородному подстановкой

$x = u + \alpha \quad y = v + p$,

где ( ) – точка пересечения прямых $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$.

Если же $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то подстановка $a_1 x + b_1 y = z$ позволяет разделить переменные.

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = \alpha = -1 \\ y_0 = \beta = 1 \end{matrix}$$

- точка пересечения прямых.

Сделаем замену переменных в исходном уравнении:

$$x = u + \alpha = u - 1 \qquad dx = du$$
$$y = v + \beta = v + 1 \qquad dy = dv$$

Уравнение преобразуется к виду:

$$(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0$$

получилось однородное уравнение.

Сделаем замену *v = ut, dv = udt + tdu;* придем к уравнению с разделяющимися переменными.

$$2(t^2 + t + 1)udu + u^2(1 + 2t)dt = 0$$

которое приводится к виду:

$$\frac{2du}{u} + \frac{(1 + 2t)dt}{t^2 + t + 1} = 0$$

интегрируя это уравнение находим:

$$2\ln|u| + \ln|t^2 + t + 1| = \ln|c|$$

отсюда:

$$u^2(t^2 + t + 1) = c$$

после замены $t = -$, получим:

$$v^2 + uv + u^2 = e$$

возвращаясь к переменным x и y

$$(u = x + 1; \quad v = y - 1),$$

находим общий интеграл исходного уравнения

$$(y-1)^2 + (y-1)(x+1) + (x+1)^2 = c$$

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = c_1,$$

где $c_1 = c - 1$

б) $y' = \dfrac{x + y + 2}{2x + 2y - 1}$

Выпишем:

$$a_1 = 1; \quad b_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad b_2 = 2.$$

Уравнение принадлежит ко второму типу, т. к. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Положим

$x + y = z$; $y = z - x$; $dy = dz - dx$

Данное уравнение примет вид:

$$\frac{dz - dx}{dx} = -\frac{x + z - x + 2}{2x + 2z - 2x - 1}$$

или

$$(2z - 1)(dz - dx) = -(z + 2)dx,$$

$$(2z - 1)dz + (3 - z)dx$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{2z - 1}{3 - z} dz + \int dx = c$$

или

$$-\int \frac{2z - 1}{z - 3} dz + x = c,$$

$$-\int \frac{2(z - 3) + 5}{z - 3} dz + x = c$$

$$-2\int dz - 5\int \frac{dz}{z-3} + x = c,$$

$$-2z - s\ln|z-3| + x = c$$

возвращаясь к старым переменным, ($z = x + y$) получим

$$-2x - 2y - 5\ln|x + y - 3| + x = c$$

или окончательный **ответ:**

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3 = c|$$

7.2.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

где $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ - уравнение в полных дифференциалах.

Пример № 572(Д). Найти общий интеграл уравнения

$$\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$$

Здесь $P(x, y) = e^x + y + \sin y$, $Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$.

Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x\cos y$$

Проинтегрируем $\frac{\partial u}{\partial x}$ по x

$$u = \int \left(e^x + y + \sin y\right)dx + C(y) = e^x + xy + x\sin y + C(y)$$

Найдем функцию C(y), продифференцировав последнее выражение по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y)$$

Получаем уравнение $x + x\cos y + C'(y) = x + x\cos y + e^y$,

Откуда находим $C'(y) = e^y$, т.е. $C(y) = e^y$

Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид
$e^x + xy + x\sin y + e^y = C$.

Пример №573 Д . Найти общий интеграл уравнения

$$(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$$

Здесь $P(x, y) = x + y - 1$, $Q(x, y) = e^y + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;$ таким образом, условие полного дифференциала выполнено, то есть данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл по формуле

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C.$$

Взяв $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим

$$\int\limits_0^x (x + y - 1)dx + \int\limits_0^y e^y dy = C_1,$$ или

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right]_0^x + e^y\Big|_0^y = C_1.$$

Подставляя пределы, находим

$$\frac{1}{2}x^2 + xy - x + e^y - 1 = C_1, \quad \text{или} \quad e^y + \frac{1}{2}x^2 + xy - x = C,$$

где $C = C_1 + 1$.

Пример №574(Д). Найти общий интеграл уравнения

$$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

Имеем

$$P(x,y) = x\sin y + y\cos y\,,\ Q(x,y) = x\cos y - y\sin y\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + y\cos y - y\sin y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{x\cos x - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1.$$

Поэтому данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем этот интегрирующий множитель:

$$\mu = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

Умножая исходное уравнение на e^x, получим уравнение

$$e^x(x\cos y - y\sin y)dy + e^x(x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

которое, как нетрудно убедиться, уже является уравнением в полных дифференциалах; в самом деле, имеем $P_1(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$, $Q_1(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

Отсюда

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x(x\sin y + y\cos y)\right) = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y);$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x(x\cos y - y\sin y)\right) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y).$$

Эти производные равны и, следовательно, левая часть полученного уравнения имеет вид $du(x,y)$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y),\ \frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y).$$

Интегрируя первое из этих равенств по y, находим

$$u = \int e^x(x\cos y - y\sin y)dy + C(x) = xe^x\sin y + e^x y\cos y - e^x\sin y + C(x).$$

Найдем производную по x от полученной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + xe^x \sin y + e^x y \cos y + C'(x) = e^x (x \sin y + y \cos y) + C'(x).$$

Сравнивая найденное значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ с $P(x, y)$, получим $C'(x) = 0$, то есть $C(x) = 0$. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$u(x, y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y - e^x \sin y = C$, или

$e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C.$

Найти общий интеграл
(*пример 1, стр. 576, Шнейдер*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{3y^2 + x^2}$$

Запишем уравнение в виде:

$$(2xy - 1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$$

Здесь $P(x; y) = 2xy - 1$; $Q(x, y) = 3y^2 + x^2$

Проверяем выполнение условий:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x; \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Таким образом, данное уравнение является уравнением в полный дифференциал.

Находим его общий интеграл по формуле:

$$\int_{X_0}^{X} P(t; y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x; t)dt = C,$$

полагая для упрощения вычислений $x_0 = y_0 = 0$

$$\int_0^X (2t \cdot 0 - 1)dt + \int_0^y (3t^2 + x^2)dt = C$$

Выполняя интегрирование, находим общий интеграл данного уравнения:

$$-t\Big|_0^x + (t^3 + x^2 t)\Big|_0^y = C, \text{ или } -x + y^3 + x^2 y = C.$$

Пример №649(Д). Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

Полагая $y' = z,$, преобразуем уравнение к виду

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right), \; или \; z' = \left(\frac{z}{x}\right)\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

Это однородное уравнение первого порядка. Полагая $\frac{z}{x} = t$, откуда $z = tx$, $z' = t'x + t$, получим уравнение $t'x + t = t\ln t$, или $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя находим:

$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, или $\ln t - 1 = C_1 x,$ откуда $t = e^{1+C_1x}$, возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению

$$y' = xe' + C_1^x.$$

следовательно, $y = \int x^{1+C_1x}dx = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1x} - \frac{1}{C^2}e^{1+C_1x} + C_2$

– общее решение.

Задача 6. найти общий интеграл уравнения:

а) $\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$

Решение:

а) здесь

$P(x, y) = e^x + y + \sin y$; $Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$;

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$.

следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, и левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x + x + x\cos y$$

проинтегрируем $\frac{\partial u}{\partial x}$ по x

$$u = \int (ex + y + \sin y)dx + c(y) = ex + xy + x\sin y + c(y)$$

найдем функцию $c(y)$, проинтегрировав последнее выражение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + c'(y)$$

получаем уравнение

$$x + x\cos y + c'(y) = e^y + x + x\cos y,$$

откуда находим

$$c'(y) = e^y,$$

т. е.

$$c(y) = e^y + c_0.$$

Таким образом

$$u(x, y) = e^x + xy + x\sin y + e^y + c_0$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$e^x + xy + x\sin y + e^y = c$$

б) $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$

Решение. Это уравнение в полных дифференциалах, т. к.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y = 1) = \frac{\partial}{\partial x}(e^y + x) = 1$$

найдем общий интеграл по формуле

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = c$$

взяв $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим

$$\int_0^x (x + y - 1)dx + \int_0^y (e^y)dy = c_1$$

или

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right]\Bigg|_0^x + e^y\Big|_0^x = c_1$$

Сделав подстановку Ньютона-Лейбница, находим

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y-1=c_1$$

или

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y=c$$

где $c=c_1+1$

Ответ: ***а)*** $e^x+xy+x\sin y+e^y=c$

б) $\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y=c$

Задача 7. Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$:

а) $(x^2y^2-1)dx+2x^3y\,dy=0$

Решение: в данном случае

$P(x,y)=x^2y^2-1$; $Q(x,y)=2x^3y$;

$$\frac{\partial p}{\partial y}=2x^2y;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y$$

Равенство

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

не выполнено, но верно условие

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]=-\frac{4x^2y}{2x^3y}=-\frac{2}{x}$$

Следовательно, исходное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от x, т. е. $\mu=\mu(x)$. Найдем этот интегрирующий множитель по формуле:

$$\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{x^2}$$

умножая исходное уравнение на $\mu=\frac{1}{x^2}$, получим

$$\left[y^2-\frac{1}{x^2}\right]dx+2xy=0$$

это – уравнение в полных дифференциалах, т. к.

$$P(x,y) = y^2 - \frac{1}{x^2};$$

$$Q(x,y) = 2xy;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[y^2 - \frac{1}{x^2} \right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy,$$

тогда

$$u(x;y) = \int \left(y2 - \frac{1}{x2} \right) dx + c(y) = xy2 + \frac{1}{x} + c(y)$$

найдем функцию $c(y)$, продифференцируем u по y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + c'(x)$$

получим уравнение

$$2xy + c'(y) = 2xy,$$

$$c'(y) = 0; \; c(y) = c_1.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = xy^2 + \frac{1}{x} + c_1;$$

Общий интеграл определяется формулой

$$xy^2 + \frac{1}{x} = c$$

б) $ydx - (x + y^2)dy = 0$

Решение: здесь

P(x,y) = y; Q(x,y) = -(x + y2);

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1;$$

$$\frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]=\frac{2}{y}.$$

Исходное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y, т. е.

$$\mu=\mu(y).$$

Найдем по формуле:

$$\mu=e^{-\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=e^{\ln\left(\frac{1}{y^2}\right)}=\frac{1}{y^2}$$

умножим исходное уравнение на $\mu=\dfrac{1}{y^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial x}{y}-\left[\frac{x}{y^2}+1\right]dy=0$$

здесь

$$P(x,y)=\frac{1}{y};$$

$$Q(x,y)=-\left(\frac{x}{y^2}+1\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial y}{\partial y}=-\left(\frac{x}{y^2}+1\right)$$

проинтегрируем $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ по x

$$u(x,y)=\int\frac{dx}{y}+c'(y)$$

получаем уравнение

$$-\frac{x}{y^2}+c'(y)=-\frac{x}{y^2}-1$$

или

$$c'(y)=-1$$

$$c(y)=-\int dy+c_1=-y+c_1$$

ответ: $\frac{x}{y}-y=c$ или $x=cy+y^2$

7.2.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ.

$$y^I+P(x)y=Q(x)$$

Линейные уравнения первого порядка можно интегрировать методом Бернулли, который заключается в следующем. С помощью подстановки $\mathrm{y}=\mathrm{u}\upsilon$,

где u и υ – две неизвестные функции, исходное уравнение преобразуется к виду:

$$u^I\upsilon+u\upsilon^I+P(x)u\upsilon=Q(x),\ \ или\ \ \left[\upsilon^I+P(x)\upsilon\right]+\upsilon u^I=Q(x)$$

.

$$y'+P(x)y=Q(x)y^m,$$

где $\mathrm{m}\neq 0,\ \mathrm{m}\neq 1$ - уравнение Бернулли.

Пример № 597 (Д). Проинтегрировать уравнение

$$y'-ythx=ch^2x$$

Полагаем $\upsilon'-\upsilon thx=0,$ откуда $\frac{d\upsilon}{\upsilon}=thxdx$; интегрируя, находим $\ln\upsilon=\ln chx\ \ или\ \ \upsilon=chx.$

Для определения u имеем уравнение $u'\upsilon=ch^2x\ \ или\ \ u'chx=ch^2x$, откуда находим

$u = \int chxdx = shx + C$.

Умножаем u на υ, получаем общее решение

$y = chx\left(shx + C\right)$.

Пример № 598 (Д). Проинтегрировать уравнение

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0; \frac{\partial y}{y} = -\frac{xdx}{1-x^2}; \ln y = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln C,$$

то есть $y = C\sqrt{1-x^2}$. Полагаем теперь $y = C(x)\sqrt{1-x^2}$; тогда

$$y' = C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

После подстановки в исходное неоднородное уравнение получим

$$C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2}C(x)\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + x,$$

то есть

$$C'(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрируем, находим

$$C(x) = \int\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C\right].$$

Пример № 599(Д). Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^2$$

Это уравнение Бернулли проинтегрируем его методом вариации произвольной постоянной. Для этого интегрируем сначала соответствующее линейное однородное уравнение $y' + \frac{y}{x} = 0$, решение которого $y = \frac{C}{x}$.

Ищем решение исходного уравнения Бернулли, полагая $y = \frac{C(x)}{x}$, $y = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$. Подстановка y *и* y' в исходное уравнение дает

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4, \ \text{или} \ \frac{C'(x)}{x} = \frac{[C(x)]^4}{x}$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4} = \frac{dx}{x}; \quad -\frac{1}{3[C(x)]^3} = \ln x - \ln C, \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln(C(x))}}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C(x))}}$$

Задача 4. проинтегрировать уравнение

$$y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$$

Решение: данное уравнение является линейным (оно содержит первые степени y и y', но не содержит их произведения).

1 способ (метод вариации произвольной постоянной).

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$y'\cos^2 x + y = 0$$

Разделив переменные получим:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0,$$

$$\ln|y| + \operatorname{tg} x = \ln c$$

или

$$y = ce^{-\operatorname{tg} x}$$

Будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде:

$$y = c(x)e^{-\operatorname{tg} x},$$

где $c(x)$ – неизвестная функция.

Подставив в исходное уравнение $y = c(x)e^{-\operatorname{tg} x}$ и $y = c(x)e^{-\operatorname{tg} x} - y = c(x)e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x$, придем к уравнению

$$\cos^2 xc'(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \cos^2 xc(x)e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x + c(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$$

или

$$c'(x)e^{-\operatorname{tg} x}\cos^2 x = \operatorname{tg} x,$$

откуда:

$$c'(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{tg} x}{\cos^2 x};$$

$$c(x) = \int\frac{e^{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{tg} xd(\operatorname{tg} x)\cdot$$

Проинтегрируем последний интеграл по частям:

$$u = \operatorname{tg} x;\ dv = e^{\operatorname{tg} x}d(\operatorname{tg} x);\ du = \frac{dx}{\cos^2 x};\ v = \int e^{\operatorname{tg} x}d(\operatorname{tg} x)$$

$$c(x) = \int e^{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{tg} xd(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x\cdot e^{\operatorname{tg} x} - \int e^{\operatorname{tg} x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\cdot e^{\operatorname{tg} x} - \int e^{\operatorname{tg} x}$$

таким образом, получаем общее решение данного уравнения:

$$y = c(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \left[(\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x} + c\right]e^{-\operatorname{tg} x} = ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1$$

2-й способ (метод Вернулли)

будем искать решение в виде: $y = uv$, где $u = u(x)$; $v = (x)$ -- две неизвестные функции. Тогда

$$y' = u'v + uv'$$

и исходное уравнение преобразуется к виду:

$$(u'v + uv')\cos^2 x + uv = \operatorname{tg} x$$

или

$$u\left[v'\cos^2 x + v\right] + u'v\cos^2 x = \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

выберем функцию v так, чтобы

$$v'\cos^2 x + v = 0;\quad \frac{dv}{v} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0$$

откуда

$$\ln|v| + \operatorname{tg} x = 0; \quad \ln|v| = -\operatorname{tg} x; \quad v = e^{-\operatorname{tg} x}$$

преобразуем уравнение (2):

$$u'v\cos^2 x = \operatorname{tg} x,$$

$$u'e^{-\operatorname{tg} x}\cos^2 x = \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$$

откуда

$$u = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = (\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x} + c,$$

подставив найденные u и v в формулу $y = u \cdot v$, получим общее решение:

$$y = u \cdot v = [(\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x} + c]e^{\operatorname{tg} x} = ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1$$

Ответ: $y = ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1$

Задача 5. Проинтегрировать уравнение Бернулли:

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$$

Решение: разделим обе части исходного уравнения на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x^2.$$

Введем новую переменную z по формуле:

$$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Так как

$$z' = \frac{y'}{y^2},$$

то последнее уравнение примет вид:

$$-z' + \frac{z}{x} = x^2$$

или

$$z' - \frac{z}{x} = -x^2$$

Получим линейное уравнение, которое решим с помощью подстановки $z = uv$, тогда

$$z' = u'v + uv'$$ и

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -x^2,$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{v}{x}\right] = -x^2 \qquad (3)$$

функцию v выберем так, чтобы

$$v' - \frac{v}{x} = 0,$$

или

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|v| = \ln|x|, \; v = x$$

уравнение (3) примет вид

$$u'x = -x^2; \quad u' = -x; \quad u = -\frac{x^2}{2} + c \cdot$$

отсюда

$$z = uv = \left[c - \frac{x^2}{2}\right]x$$

возвращаясь к переменной y по формуле $y = \frac{1}{2}$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{\left[c - \frac{x^2}{2}\right]x},$$

или

$$xy\left[c - \frac{x^2}{2}\right] = 1$$

ответ: $xy\left[c - \frac{x^2}{2}\right] = 1$

Задача 8. а) проинтегрировать уравнение Клеро $y = xy' - ey'$

Решение: положим $y' = p$, тогда уравнение запишется в виде

$$y = px - e^p,$$

продифференцируем его

$dy = pdx + xdp - e^p dp$,

учитывая, что $dy = pdx$, получим

$$pdx = pdx + xdp - e^p dp,$$

или

$$xdp - e^p dp = 0$$

$$dp(x - e^p) = 0$$

таким образом, либо $dp = 0$, либо $x - e^p = 0$. если $dp = 0$, то $p = c$. Подставив это значение p в равенство $y = px - e^p$, получим общее решение данного уравнения:

$$y = cx - e^e$$

если положить $x = e^p$, то $y = pe^p - e^p = e^p(p-1)$, и приходим к особому решению исходного уравнения

$$\begin{cases} x = e^p \\ y = e^p(p-1) \end{cases};$$

исключая параметр p (в данном случае p>ln x), найдем особое решение в явном виде:

$$y = x(\ln x - 1)$$

б) $y = xy'^2 + y'^2$ - уравнение Лагранжа

решение: положим $y' = p$, тогда

$$y = xp^2 + p^2$$

продифференцируем последнее равенство:

$$dy = p^2 dx + 2pxdx + 2pdp$$

сокращая на p, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(1 - p)dx = 2(x+1)dp$$

или

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

Интегрируя его, находим

$$\ln|x+1| = -2\ln|1-p| + \ln c,$$

откуда

$$x+1=\frac{c}{(p-1)^2}$$

используя данное уравнение

$$y=p^2(x+1),$$

получим

$$y=\frac{cp^2}{(p-1)^2}$$

итак, общее решение имеет вид:

$$x+1=\frac{c}{(p-1)^2};$$

$$y=\frac{cp^2}{(p-1)^2}$$

проведенное нами сокращение на p могло привести к потере особого решения. Полагая $p = 0$, находим из данного уравнения $y = 0$. это – особое решение.

Ответ: $\begin{cases} x+1=\dfrac{c}{(p-1)^2} \\ y=\dfrac{cp^2}{(p-1)^2} \end{cases}$ (общее решение)

$y = 0$ (особое решение)

7.3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$. Решение этого уравнения находится n-кратным интегрированием, а именно:

$$y^{(n)} = f(x),\ y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где

$$f_n(x) = \underbrace{\int\int\int \ldots \int}_{n\ \text{раз}} f(x)dx^n.$$

Пример №643(Д). Найти решение задачи Коши, удовлетворяющее начальным условиям.

$$y'' = xe^{-x} \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 0$$

Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int\left[-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2,$$

или

$$y = (x+2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$1 = 2 + \mathrm{C}_2; \qquad C_2 = -1; \qquad 0 = -1 + C_1; \qquad C_1 = 1$$

следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y = (x+2)e^{-x} + x - 1$$

Это же решение можно найти и следующим образом, используя сразу заданные начальные условия:

$$y' = y'(0) + \int_0^X xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]\Big|_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1;$$

$$y = y(0) + \int_0^X \left[-xe^{-x} - e^{-x} + 1\right]dx = 1 + \left[(x+2)e^{-x} + x\right]\Big|_0^x = (x+2)e^{-x} +$$

Дифференциальные уравнения вида F(x, $y^{(k)}$, $y^{(k+1)}$, …, $y^{(n)}$) =0, не содержащие искомой функции. Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, то есть полагая $y^{(k)}=z$. Тогда получим уравнение

F(x, z, z’, …, $z^{(n-k)}$) = 0

Таким образом порядок уравнения понижается на к единиц.

Пример № 649 (Д). Найти общее решение уравнения

$$xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

Полагая $y' = z$, преобразуем уравнение к виду

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right), \quad \text{или} \quad z' = \left(\frac{z}{x}\right)\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

Это однородное уравнение первого порядка. Полагая $\frac{z}{x} = t$, откуда $z = tx,\ \ z' = t'x + t$, получим уравнение

$$t'x + t = t\ln t \ \text{ или } \ \frac{dt}{t(\ln(t) - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

интегрируя находим

$$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1, \quad \text{или} \quad \ln t - 1 = C_1 x$$

откуда $t = e^{1+C_1x}$; возвращаясь к переменной у, приходим к уравнению $y' = xe^{1+C_1x}$. Следовательно,

$$y = \int xe^{1+C_1x}dx = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1x} - \frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1x} + C_2$$

Дифференциальные уравнения вида $F\left(y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)}\right) = 0$, не содержащее независимой переменной. Уравнение этого вида допускает понижение порядка на единицу, если положить $y' = z$, а за новый аргумент принять сам *y*. В этом случае y'' , y''' , … выразятся по формулам

$$y'' = z\frac{dz}{dy}, \quad y''' = z\left(z\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right),$$ … через z

и производные от z по y, причем порядок уравнения понизится на единицу.

Пример № 650 (Д). Найти общее решение уравнения $1+(y')^2 = yy''$.

Положим $y' = z \quad y'' = z\frac{dz}{dy}$. Уравнение примет вид $1+z^2 = yz\frac{dz}{dy}$; это уравнение первого порядка относительно z с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y}; \ln(1+z^2) = 2\ln y + 2\ln C_1; 1+z^2 = C_1^2 y^2; z = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

отсюда, возвращаясь к переменной y, имеем

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}, \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx, \frac{1}{C_1}\ln(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}) = \pm(x + C_2),$$

или

$$y = \frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1} + e^{\mp(x+C_2)C_1}\right) = \frac{1}{C_1}ch(C_1(x+C_2)) = C_1 ch\frac{x+C_2}{C_1}.$$

Задача 9. найти общее решение уравнения

$$xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

решение: полагая $y' = z$, преобразуем уравнение к виду:

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

или

$$z' = \frac{z}{x}\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

получим однородное уравнение первого порядка. Полагая $\frac{z}{x} = u$, откуда

$z = ux$,

$z' = u'x + u$,

придем к уравнению

$u'x + u = u\ln u$

или

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

интегрируя, находим

$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln c_1$

или

$\ln u - 1 = c_1 x$,

откуда

$u = e^{1+c_1x}$,

возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению

$y' = xe^{1+c_1x}$,

следовательно

$$y = \int xe^{1+c_1x}dx = \left| \begin{matrix} u = x_1 \quad du = dx \\ dv = e^{1+c_1x}dx \\ v = \int e^{1+c_1x}dx \equiv \frac{1}{c_1}e^{1+c_1x} \end{matrix} \right| = x\frac{e^{1+c_1x}}{c_1} - \frac{1}{c_1}\int e^{1+c_1x}dx = \frac{x}{c_1}e^{1+c_1x} + c_2$$

Ответ: $y = \frac{x}{c_1}e^{1+c_1x} - \frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x} + c_2$

Задача 10. найти решение задачи Коши

$yy'' - y'^2 = y^4$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

решение: полагаем

$y' = p$,

тогда

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

и исходное уравнение преобразуется к виду

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4$$

получим уравнение типа Бернулли относительно p (y считаем аргументом).

Сделаем замену

$$z = p^2, \ \frac{dz}{dy} = 2p\frac{dp}{dy},$$

тогда

$$\frac{y}{2}\frac{dz}{dy} - z = y^4$$

или

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z = 2y^3 \qquad (4)$$

- линейное уравнение

рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z = 0$$

или

$$\frac{dz}{dz} = \frac{2dy}{y}$$

$$\ln|z| = 2\ln|y| + \ln|c|,$$

$$z = cy^2$$

будем искать решение неоднородного уравнения (4) в виде

$$z = c(y)\cdot y^2,$$

где: $c(y)$ - неизвестная функция

подставим в (4) $z = c(y)y^2$ и $z' = c'(y)y^2 + 2c(y)y$, тогда получим уравнение

$$c'(y)y^2 + 2c(y)y - \frac{2}{y}c(y)y^2 = 2y^3$$

$$c'(y) = 2y$$

$$c(y) = \int 2ydy + c_1 = y^2 + c,$$

$$z = (y^2 + c_1)y^2 = y^4 + c_1y^2$$

учитывая, что $z = p^2$

$$p^2=\left(y^2+c_1\right)y^2$$

$$p=\pm y\sqrt{y^2+c_1}$$

из условия $y'=p=0$ при $y=1$ имеем $c_1=-1$, следовательно,

$$p=\pm y\sqrt{y^2-1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{y^2-1},$$

$$\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$$

$$\arccos\frac{1}{y}=\pm x=c_2$$

полагая $y=1$ и $x=0$, получим

$$c_2=0$$

ответ: $\frac{1}{y}=\cos x$ или $y=\sec x$

7.3.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами высших порядков

Пример № 690(Д). Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{IV}-13y^{II}+36y=0$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^4+13k^2+36=0$;

Его корням $k_{1,2}=\pm 3;\ k_{3,4}=\pm 2$ соответствуют линейно независимые частные решения $e^{3x},\ e^{-3x},\ e^{2x}\ и\ e^{-2x}$. Следовательно, общее решение:

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}.$$

Пример № 692(Д). $\mathrm{x}-2\mathrm{x}=0$, удовлетворяющее краевым условиям $\mathrm{x}=0$ при $t=0$ и $x=3$ при $t=\ln 2$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 = 2$. Следовательно, общее решение записывается в виде $x = C_1 + C_2 e^{2t}$.

Подставляя краевые условия в найденное общее решение, получаем:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 e^{2\ln 2} = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 4C_2 = 3 \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -1;\ C_2 = 1$. Итак, $x = e^{2x} - 1$ искомое частное решение удовлетворяющее заданным краевым условиям.

Пример Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{III} + y^{II} - 2y^{I} = x - e^x$$

Характеристическое уравнение $k^3 + k^2 - 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -2$, а потому общее решение однородного уравнения $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$. Частное решение ищем, пользуясь принципом наложения, в виде $u = u_1 + u_2 = x(Ax + B) + Cxe^x$.

Итак,

$$\begin{array}{c|l} 0 & u = (Ax + B)x + Cxe^x \\ -2 & u' = 2x + B + Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u^{II} = 2A + 2Ce^x + Cxe^x \\ 1 & \underline{u^{III} = 3Ce^x + Cxe^x} \end{array}$$

$$u^{III} + u^{II} + 2u^{I} = -2Ax + (2A - 3B) + 3Ce^x = x - e^x.$$

Отсюда $-4A = 1,\ 2A - 2B = 0,\ 3C = -1$, т.е. $A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{3}$. Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{4}x(x+1) - \frac{1}{3}xe^x.$$

№ 717(Д). Найти общее решение дифференциального уравнения

$y^{II} + y = 3\sin x$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$, а потому общее решение однородного уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Частное решение следует искать в виде $u = x(A\cos x + B\sin x)$ – (в данном случае $\alpha = 0;\ \beta = i;\ \alpha + \beta_i = i$, т.к.

i – является простым корнем характеристического уравнения, то r=1, m=n=l=0).

Итак,

$$\begin{array}{r|l} 1 & u = (A\cos x + B\sin x)x \\ +\,0 & u^I = (-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x) \\ 1 & u^{II} = 2(-A\sin x + B\cos x) + (-A\cos x - B\sin x)x \\ \hline \end{array}$$

$u^{II} + u = -2A\sin x + 2B\cos x = 3\sin x$.

Отсюда $-2A = 3;\ 2B = 0$, т.е. $A = -\dfrac{3}{2},\quad B = 0$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{2} x\cos x.$$

Задача 11. Проинтегрировать уравнения:

а) $y'' + 3y' - 4y = 0;$

б) $4y'' - 4y' + y = 0$;

в) $y'' - 8y' + 25y = 0$;

г) $y'' - 2y' = 0$;

д) $y'' + 9y = 0$

решение: ***а)*** $y'' + 3y' - 4y = 0$

характеристическое уравнение

$k^2 + 3k - 4 = 0$

$k_1 = 1;\quad k_2 = -4 - \text{êîðíè}.$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$ - **ответ**

б) $4y'' - 4y' + y = 0$

$$4k^2 - 4k + 1 = 0$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$$

ответ: $y = c_1 x e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} = (c_1 x + c_2) e^{\frac{1}{2}x}$

в) $y'' - 8y' + 25y = 0$

$$k^2 - 8k + 25 = 0$$

$$k_1 = 4 + 3i; \quad k_2 = 4 - 3i$$

$$y = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

г) $y'' - 2y' = 0$

$$k^2 - 2k = 0$$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 2$$

ответ: $y = c_1 + c_2 e^{2x}$

д) $y'' + 9y = 0$

$$k^2 + 9 = 0$$

$$k_1 = 3i; \quad k_2 = -3i$$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

Задача 12. решить дифференциальное уравнение методом неопределенных коэффициентов

а) $y'' + y' - 5y = 2e^{3x}$

решение: однородное уравнение

$$y'' + y' - 6y = 0;$$

$$k^2 + k - 6 = 0;$$

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2$$

$$y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

- общее решение однородного уравнения

правая часть $2\acute{o}^{3\div}$, число3 не является корнем характерного уравнения

$y_1 = Ae^{3x}$ - частное решение

$$y' = 3Ae^{3x}{}_1$$

$$y_1'' = 9Ae^{3x}$$

подставим в исходное уравнение

$$6Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$6A = 2 \quad A = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Ответ: $y = y_0 + y_1 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}$

б) $y'' + 2y' + y = 8e^{-x}$

Решение:

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

$$y_0 = (c_1 + c_2)e^{-x}$$

правая часть $8e^{-x}$ $k = -1$ совпадает с корнем

$$y_1 = Ax^2 e^{-x}$$

$$y_1' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$

$$y_1'' = 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$$

подставляем в уравнение

$$2Ae^{-x} = 8e^{-x},$$

$$2A = 8;$$

$$A = 4$$

$$y_1 = 4x^2 e^{-x}$$

Ответ: $y = y_0 + y_1 = (c_1 x + c_2)e^{-x} + 4x^2 e^{-x}$

в) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$

характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$k_1 = 1; \quad k_2 = -2$$

$$y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

правая часть

$$\cos 3x - 3\sin x$$

вида

$e^{\alpha x}(a\cos\beta\ x+b\sin\ \beta\, x)$

$y_1=A\cos x+B\sin x$

$y_1'=-A\sin x+B\cos x$

$y_1''=-A\cos x-B\sin x$

$y_1''+y_1'+(-2y_1)=(B-3A)\cos x+(-3B-A)\sin x\equiv\cos x-3\sin x$

имеем систему

$$\begin{cases}B-3A=1\\-A-3B=-3\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}B-3A=1\\3B+A=3\end{cases};$$

- решение

$y_1=\sin x$

$y=y_0+y_1=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+\sin x$

г) $y''+4y=12\cos 2x$

$k^2+4=0$

$k_1=2i;\quad k_2-2i$

$y_0=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

правая часть имеет вид

$e^{\alpha x}(a\cos\ \beta\, x+b\sin\ \beta\, x)$

и совпадает с одним из корней характеристического уравнения

$y_1=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

$y_1'=A\cos 2x+B\sin 2x+x(2B\cos 2x-2A\sin 2x)$

$y_1''=4B\cos 2x-4A\sin 2x-x(4A\cos 2x+4B\sin 2x)$

$y_1''+4y_1=4B\cos 2x-4A\sin x2x\equiv 12\cos 2x$

получим систему

$$\begin{cases}4B=12\\4A=0\end{cases}$$

$B=3;\quad A=0$ - **решение**

$y_1 3x\sin 2x$

Ответ: $y=y_0+y_1=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+3x\sin 2x$

д) $y'' - 2y' + 2yx^2$

$k^2 - 2k + 2 = 0$

$k_{1,2} = 1 \pm i$

$y_0 = e^x\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)$

правая часть x^2 вида:

$e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

где

$P_n(x) = x^2, \quad Q_m(x) = 0; \alpha = 0,\ \beta = 0, \alpha + i\beta = 0 + i0 = 0.$

так как корня 0 у характеристического уравнения нет, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$y_1 = Ax^2 + B\mathbf{x} + c$

$y_1' = 2Ax + B;$

$y_1'' = 2A$

$y_1'' - 2y_1' + 2y = 2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2$

получим систему

$$\begin{cases} 2A = 1 & A = \frac{1}{2} \\ 2B - 4A = 0 & B = 1 \\ 2C - 2B + 2A = 0 & C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$y_1 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$

$y = y_0 + y_1 = e^x\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) + \frac{1}{2}(x+1)^2$

е) $y'' + 2y' = 12x^2 + 4x - 4$

решение: характеристическое уравнение

$k^2 + 2k = 0$

$k_1 = 0;\ k_2 = -2$

$y_0 = c_1 + c_2 e^{-2x}$

правая часть

$12x^2 + 4x - 4$

$$P_n(x) = 12x^2 + 4x - 4;\ Q_m = 0;\ \alpha = 0,\ \beta = 0$$

т. к. $\alpha + i\beta = 0$ и совпадает с одним корнем характеристического уравнения, то частные решения будем искать в виде:

$$y_1 = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y_1'' = 6Ax + 2B$$

$$y_1'' + 2y_1'' = 6Ax^2 + (6A + 4B)x + (2B + 2C) \equiv 12x^2 + 4x - 4$$

составим систему

$$\begin{cases} 6A = 12 & A = 2 \\ 6A + 4B = 4 & B = -2 \\ 2B + 2C = -4 & C = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = 2x^3 - 2x^2$$

$$y = y_0 + y_1 = c_1 + c_2e^{-2x} + 2x^3 - 2x^2$$

ж) $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$

$$k^3 + k^2 - 2k = 0$$

$$k_1 = 0,\quad k_2 = 1,\quad k_3 = -2$$

$$y_0 = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-2x}$$

частные решения ищем в виде:

$$y_1 = y_2 + y_3 = x(Ax + B) + Cxe^x$$

$$y_1' = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x$$

$$y_1'' = 2A = 2Ce^x + Cxe^x$$

$$y_1''' = 3Ce^x + Cxe^x$$

$$y_1''' + y_1'' - 2y_1' = -4Ax + (2A - 2B) + 3Ce^x \equiv x - e^x$$

составим систему:

$$\begin{cases} -4A = 1 & A = -\frac{1}{4} \\ 2A - 2B = 0 & B = -\frac{1}{4} \\ 3C = -1 & C = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = y_0 + y_1 = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-2x} - \tfrac{1}{4}x(x-1) - \tfrac{1}{3}xe^x$$

з) $y^{IV} - 2y'' + y = (48x - 24)e^x$

$k^4-2k^2+1=0$

$k_{1,2}=-1;\quad k_{3,4}=1$

$y_0=(c_1+c_2x)e^{-x}+(c_3+c_4x)e^x$

правая часть данного уравнения является функцией вида

$e^{\alpha x}\left[Pn(x)\cos\beta x+Qm(x)\sin\beta x\right]$

где

$P_n(x)=48x-2u$, $\qquad Q_m(x)=0$;

$\alpha=1,\quad \beta=0,\quad \alpha+i\beta=1$

и совпадает с двумя корнями характеристического уравнения.

$$y_1=x^2(A+B)e^x=\left(Ax^3+Bx^2\right)e^x$$
$$y_1'=\left[Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx\right]e^x$$
$$y_1''=\left[Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B)x+2B\right]e^x$$
$$y_1'''=\left[Ax^3+(9A+B)x^2+(18A+6B)x+(6A+6B)\right]e^x$$
$$y_1^{IV}=\left[Ax^3+(12A+B)x^2+(36A+8B)x+(24A+12B)\right]e^x$$
$$y_1^{IV}-2y_1''+y_1=\left[24Ax+(24A+8B)\right]e^x\equiv(48x-24)e^x$$
$$\begin{cases}24A=48 & A=2\\ 24A+8B=-24 & B=-9\end{cases}$$
$$y_1=(2x^3-9x^2)e^x$$
$$y=y_0+y_1=(c_1+c_2x)e^{-x}+(c_3+c_4)e^x+(2x^3-9x^2)e^x$$

$$y^{IV}-16y=4\cos 2x-8\sin 2x$$

4) $k^4-16=0$

$k_{1,2}=\pm 2;\quad k_{3,4}=\pm 2i$

$y_0=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

правая часть совпадает с корнем х уравнения.

$$y_1=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$$
$$y_1'=A\cos 2x+B\sin 2x+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)$$
$$y_1''=-4A\sin 2x+4B\cos 2x+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)$$
$$y_1'''=-12A\cos 2x-12B\sin 2x+x(8A\sin 2x-8B\cos 2x)$$
$$y_1^{IV}=32A\sin 2x-32B\cos 2x+x(16A\cos 2x+16B\sin 2x)$$
$$y_1^{IV}-16y1=32A\sin 2x-32B\cos 2x\equiv 4\cos 2x-8\sin 2x$$

$$\begin{cases}32A=-8 & A=-\frac{1}{4}\\ -32B=4 & B=-\frac{1}{8}\end{cases}$$

$y1=-x(\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x)$

$y=y0+y1=$

$=c1e-2x+c2e2x+c3\cos 2x+c4\sin 2x+-x(\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x)$

Задача 13. найти решение уравнения $y''+y=\operatorname{tg}x$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0)=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$

Решение: здесь

$k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm i$

$y0=c1\cos x+c2\sin x$

$y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x,$

где: $c_1(x)$ и $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2=0\\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'=f(x)\end{cases}$$

y1 и y2 – частные решения однородного уравнения.

$y''+y=0$,

f(x) – правая часть, тогда

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0\\ -c_1'(x)\sin x_1+c_2'(x)\cos x=\operatorname{tg}x\end{cases}$$

$$c_1'(x)=-\frac{\sin^2 x}{\cos x};\quad c_2'(x)=\sin x$$

$$c_1'(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=-\int\frac{dx}{\cos x}+\int\cos x dx=$$

$$=-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin x+c_1,$$

$$c_2(x)=\int\sin x dx=-\cos x+c_2$$

таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y=\left(\sin x-\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c1\right)\cos x+(c2-\cos x)\sin x=$$

$$=c1\cos x+c2\sin x-\cos x\cdot\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

постоянные c_1 и c_2 найдем из краевых значений

$$c_1\cos O + c_2\sin O - \cos O \ln tg\frac{\pi}{4} = 0;$$

$$c_1\cos\frac{\pi}{6} + c_2\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

или

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} + c_2\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3} = 0 \end{cases}$$

$c_1=0$; $c_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 3$

9.РЯДЫ

9.1.Положительные ряды

1. Пользуясь определением сходимости числового ряда, и в сходимости найти его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$$

Решение: Общий член данного ряда представим в виде

$$u_n = \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right]$$

Это можно сделать путем разложения рациональной дроби на простейшие методом неопределенных коэффициентов Декарта.

Находим n-ю частичную сумму этого ряда.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(n-2)^2} - \frac{1}{n^2} + \right.$$

$$+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$$

Следовательно, согласно определениям сходимости ряда и его суммы, получаем

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}$$

.

т.е. данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ сходится и его сумма $S=\frac{5}{16}$, можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{5}{16}$$

2. Исследовать на сходимость знакопостоянные ряды, заданные в 2.1-2.10.

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$

Решение: Для сравнения вводим в рассмотрение вспомогательный (заведомо сходящийся) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится в силу того, что знаменатель бесконечной геометрической прогрессии $\{V_n\}$, $V_n=\frac{1}{2^n}$

$\left(n=\overline{0,\infty}\right)$ $q=\frac{1}{2}<1$. Каждый член исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ меньше соответствующего члена сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, т.е. $u_n<v_n$ или $\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}$, $n=\overline{1,\infty}.$

Следовательно, по признаку сравнения данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ сходится.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Решение. Для сравнения вводим вспомогательный (заведомо расходящийся) ряд, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (“гармонический”). Каждый член исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, начиная со второго, больше соответствующего члена расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, т.е. $u_n>v_n$ или $\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n}$, $n=\overline{2,\infty}$. Следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ расходится.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

Решение. Для сравнения вводим в рассмотрение вспомогательный (заведомо сходящийся) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\frac{1}{n^2}$ (“обратных квадратов”). Составим отношение $\frac{u_n}{v_n}$ и перейдем к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n\to\infty}=\ln e=1.$$

Следовательно, по принципу сравнения в предельной форме $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a,0<a<+\infty\right)$ данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Решение. Для выяснения сходимости данного ряда применили признак Даламбера в предельной форме. Здесь $u_n = \frac{2^n}{n!}$,

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}; \qquad \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n} = \frac{2}{n+1},$$

$n = \overline{1,\infty}$.

Находим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$.

Следовательно, по признаку Даламбера в предельной форме $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p, p = 0 < 1\right)$ ряд сходится.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$

Решение. Для выяснения сходимости данного ряда применим признак Даламбера в предельной форме. Здесь $u_n = \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$,

$$u_{n+1} = \frac{3^{(n+1)^2-1}}{2^{(n+1)^2}\sqrt{n+1}},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{(n+1)^2-1}}{2^{(n+1)^2}\sqrt{n+1}} : \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}} = \frac{3^{(n+1)^2-1}}{2^{(n+1)^2}\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2^{n^2}\sqrt{n}}{3^{n^2-1}} =$$

$$= \frac{3^{n^2}\cdot 3^{2n}\cdot 2^{n^2}\sqrt{n}}{2^{n^2}\cdot 2^{2n}\cdot 2\sqrt{n+1}\cdot 3^{n^2}\cdot 3^{-1}} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},$$

$n = \overline{1,\infty}$. Находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}\cdot(+\infty)\cdot\frac{1}{1} = +\infty. > 1$$

Следовательно, по признаку Даламбера в предельной форме данный ряд расходится.

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Решение. Для выяснения сходимости данного ряда применим радикальный признак Коши в предельной форме.

Здесь $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$,

Находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Следовательно, по радикальному признаку Коши в предельной форме данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ сходится.

2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$

Решение. Для выяснения сходимости данного ряда применяем радикальный признак Коши в предельной форме.

Здесь

$$u_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n} = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{(n+1)^n} = \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^n, \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Находим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e > 1\cdot$

Следовательно, по радикальному признаку Коши в предельной форме данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$ расходится.

2.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Решение. Для выяснения сходимости данного ряда применим интегральный признак Маклорена-Коши, т.к. $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^2}$, то функцией принимающей в точках $x=n$ значения функции $f(n)$, будет функция $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$. Она непрерывна в промежутке $2 \le x \le +\infty$ и монотонно в нем убывает. Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{B\to\infty}\int_2^B\frac{d\ln x}{(\ln x)^2}=\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln B}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Рассматриваемый несобственный интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Маклорена-Коши данный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ сходится.

2.10. $\sum_{n=2}^{\infty}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Решение. Для выяснения сходимости данного ряда применим интегральный признак Маклорена-Коши. Т.к. $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$, то функцией, принимающей в точках $x=n$ значения функции $f(n)$ будет функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Она непрерывна в промежутке $2 \le x \le +\infty$ и монотонно в нем убывает.

Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{B\to\infty}\int_2^B\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{B\to\infty}(\ln\ln B-\ln\ln 2)=+\infty$$

Рассматриваемый несобственный интеграл расходится, следовательно, по интегральному признаку Маклорена-Коши данный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

9.2.Знакоперменные ряды

3. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды, заданные в 3.1,3.2,3.2.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{3^n}$ $(\alpha = const)$.

Решение. Прежде всего исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. Наряду с данным рядом рассмотрим ряд $\sum\limits_{n==1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{3^n}$, составленный из абсолютных величин всех членов данного ряда. Для выяснения сходимости данного ряда с положительными членами применим признак сравнения. В качестве вспомогательного (заведомо сходящегося) ряда, вводим в рассмотрение геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, который сходится в силу того, что знаменатель геометрической прогрессии $\{V_n\}$, $V_n = \frac{1}{3^n}$, $\left(n = \overline{0,\infty}\right)$, $q = \frac{1}{3} < 1$. Условие $|u_n| \le V_n$, $\left(n = \overline{1,\infty}\right)$, признака выполняется, т.е. $\frac{|\cos n\alpha|}{3^n} \le \frac{1}{3^n}$, $\left(n = \overline{1,\infty}\right)$, т.к. $|\cos n\alpha| \le 1$. Каковы бы ни были n и α. Следовательно, по признаку сравнения будет сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{3^n}$. Значит, согласно теореме Эйлера, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{3^n}$ сходится и притом абсолютно.

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, он удовлетворяет всем условиям признака Лейбница: $u_n > u_{n+1}$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \left(n = \overline{1,\infty}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится, причем сходится не абсолютно (условно), поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, составленный из абсолютных величин всех членов данного ряда, расходится по признаку сравнения: $|u_n| \geq V_n$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ $\left(n = \overline{1,\infty}\right)$, где $V_n = \frac{1}{n}$ - общий член геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}V_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$

Решение. Данный ряд является знакочередующимся, он удовлетворяет всем условиям признака Лейбница: $u_n > u_{n+1}$, т.е. $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}, \left(n = \overline{1,\infty}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$. Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится и притом абсолютно, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, составленный из абсолютных величин всех членов данного ряда, сходится. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ легко устанавливается с помощью интегрального признака Маклорена-Коши: несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится $\left(\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1\right)$, следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

9.3.Функциональные ряды

4. Найти области сходимости степенных рядов, заданных в 4.1 и 4.2.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n^2}$

Решение. Находим сначала радиус R и интервал сходимости (-R;R) данного степенного ряда. На основании признака Даламбера в предельной форме $R=\dfrac{1}{\rho},\left(0\le\rho\le\infty\right)$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|C_{n+1}|}{|C_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}=1$, следовательно, радиус сходимости исследуемого ряда $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{1}=1$, интервал сходимости ряда (-R;R) = (-1;1).

Исследуем далее данный ряд в предельных концевых точках интервала сходимости на абсолютную сходимость, для чего исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|\Big|_{x=R=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

Этот числовой ряд сходится, следовательно, исходный ряд в предельных концевых точках интервала сходимости (-1;1) сходится абсолютно.

Таким образом, исследуемый степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n^2}$ сходится абсолютно на отрезке [-1;1] (область сходимости D=[-1;1] данного ряда отличается от его интервала сходимости (-R;R)=(-1;1) тем, что ряд сходится в предельных концевых точках x=-1 и x=1).

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^n x^n$.

Решение. Находим сначала радиус R и интервал сходимости (-R;R) данного степенного ряда. На основании радикального признака Коши в предельной форме $R=\dfrac{1}{\rho},\left(0\le\rho<\infty\right)$,

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{3}{1}=3$

следовательно, радиус сходимости $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{3}$, интервал сходимости

(-R;R)=($-\frac{1}{3};\frac{1}{3}$). Исследуем далее данный ряд в предельных точках интервала сходимости $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ на абсолютную сходимость, для чего исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|\Big|_{x=R=\frac{1}{3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Этот числовой ряд расходится в силу того, что общий член $\left|u_n(x)\right|\Big|_{x=R=\frac{1}{3}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ этого ряда при $n\to\infty$ не стремится к нулю и значит, не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0$$

Следовательно, данный ряд в предельных концевых точках интервала сходимости $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ не является абсолютно сходящимся. В предельных концевых точках интервала сходимости данный ряд не является и условно сходящимся, в силу того, что общий член ряда не стремится к нулю.

Таким образом, исследуемый степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n\cdot x^n$ сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ (область сходимости $D=\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$данного ряда совпадает с его интервалом сходимости (-R;R)=$\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$).

9.4. Разложение функции в ряд

5. Разложить в степенной ряд по степеням x функции, заданные в 5.1 и 5.2

5.1 $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}$

Решение. Предварительно выразим $\sin^2\frac{x}{2}$ через $\cos x$. Имеем $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$. Функцию $\varphi(x)=\cos x$, входящую в это выражение, разложим в ряд Маклорена.

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\ldots$$

Поскольку

$$\varphi'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi''(x)=-\cos x=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi'''(x)=\sin x=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi^{IV}(x)=\cos x=\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

…

$$\varphi^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$\varphi(0)=\cos 0=1, \varphi'(0)=-\sin 0=0, \varphi''(0)=-\cos 0=-1, \varphi'''(0)=\sin 0=0,$,
$\varphi^{IV}(0)=\cos 0=1,\ldots$

$\varphi^{(n)}(0)=\cos\dfrac{n\pi}{2},\ldots$ то ряд Маклорена, соответствующий функции $\varphi(x)=\cos x$, имеет вид $\cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+\left(\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$

Запишем формулу Маклорена для функции $\varphi(x)=\cos x$ с остальным членом $R_{n+1}(x)$ в формуле Лагранжа.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{\varphi(n+1)(\theta x)}{n+1}=$

$$\left\{\cos\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right\}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},0<\theta<1.$$

Каково бы ни было $x\in(-\infty;\infty)$, остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Действительно, в силу того, что $\left|\cos\left[\theta x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]\right|\le 1$, имеем

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{\left|\cos\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right|\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ с общим членом $C_{n+1}=\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. При любом данном $|x|$, $x\in(-\infty;\infty)$ этот ряд сходится.

В самом деле, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+2}}{C_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{n+2}=\rho=0<1$, то по признаку Даламбера в предельной форме ряд сходится.

Следовательно, для него выполняется необходимое условие сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$. Значит, в силу того, что $|R_{n+1}(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$.

Таким образом, выполняются необходимые и достаточные условия разложимости функции $\varphi(x)=\cos x$ в ряд Маклорена, а потому

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}+\ldots$$ или,

принимая во внимание, что

$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0\\(-1)^{n/2}\end{cases}$ при нечетном n, n=2m-1, m=1,2, при четном n, n=2m, m=1,2,3…

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\ldots$$

Подставив в равенство $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$ вместо функции $\cos x$ полученный ряд, окончательно получим разложение функции $\sin^2\frac{x}{2}$ в степенной ряд по степеням x:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2\cdot 2!}-\frac{x^4}{2\cdot 4!}+\frac{x^6}{2\cdot 6!}-\frac{x^8}{2\cdot 8!}+\ldots+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m}}{2\cdot(2m)!},\ x\in(-\infty;\infty)$$

5.2. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$

Данная функция представляет собой рациональную дробь. Разлагаем ее на элементарные (простейшие) дроби:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

В полученном разложении элементарные дроби справа запишем несколько в ином виде $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1-x}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$.

Функции $\dfrac{1}{1-x}$ и $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$, входящие в последнее равенство, будем рассматривать как суммы соответствующих геометрических рядов. Имеем $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, |x|<1$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots, |x|<2$$

Умножив сумму и все члены второго ряда на $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ и произведя почленное сложение с первым рядом, получим разложение данной функции $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ в степенной ряд по степеням x:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\ldots+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+\ldots, x\in(-1;1)$$

.

6. Пользуясь разложением функции $\cos x$ в степенной ряд, вычислить приближенно $\cos 5^o$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Для вычисления приближенного значения $\cos 5^o$ используем формулу разложения $\cos x$ в степенной ряд по степеням x.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Под x подразумевается радианная мера угла. Предварительно угол в 5^o выразим в радианах; используя пропорцию $\dfrac{5^o}{360^o}=\dfrac{x}{2\pi}$, находим $x=\dfrac{2\pi\cdot 5^o}{360^o}=\dfrac{\pi}{36}$

$$\cos 5^o=\cos\frac{\pi}{36}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4-\ldots$$

Этот знакочередующий ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. По-этому, если за приближенное значение $\cos\dfrac{\pi}{3}$ взято значение n-ой частичной суммы S_n ряда, то абсолютная величина допускаемой при этом погрешности (ошибки) будет меньше абсолютной величины первого из брошенных членов ряда. При заданной точности $(\xi = 10^{-5})$ находим n из условия $\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n} < 10^{-5}$.

Это неравенство выполняется уже при n=2, т.к. $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{4} < 4\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$. Взяв из формулы два первых члена ряда, вычислим

$$\cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \approx 1 - \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{3{,}14}{36}\right)^2 \approx 1 - 0{,}003808 = 0{,}996192$$

Таким образом, $\cos 5^o \approx 0{,}99619, \cos 5^o - 0{,}99619 < 10^{-5}$.

7. Пользуясь степенным логарифмическим рядом, вычислим приближенное значение ln11 с точностью до 10^{-5}.

Решение. Для вычисления логарифмов пользуемся разложением в степенной ряд функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$;

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right), |x| < 1,$$

В частности, полагая $x = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}$, где $a_2, a_1; a_2 > a_1$ - положительные числа, получим (1) $\ln\frac{a_2}{a_1} = 2\left[\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\right)^5 + \ldots\right]$. Этот ряд сходится для всех положительных $a_2, a_1; a_2 > a_1$ и удобен для вычисления приближенных значений логарифмов.

Так, например, пусть $a_2 = 2; a_1 = 1$. Тогда $\ln\frac{a_2}{a_1} = \ln 2$ и

$$\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} = \frac{1}{3}$$

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{3^{2n-1}} + \ldots\right)$$

Если ln2 уже вычислен с нужной степенью, то по той же формуле (1) можно вычислить ln3. Действительно, пусть $a_2 = 3; a_1 = 2$. Тогда $\frac{a_2}{a_1} = \ln 3 - \ln 2$ и $\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} = \frac{1}{5}$

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{5^{2n-1}} + \ldots\right].$$

Далее, пусть $a_2 = N + 1; a_1 = N,$ N-любое натуральное число, N>2. Тогда $\ln\frac{a_2}{a_1} = \ln(N+1) - \ln(N)$ и $\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} = \frac{1}{2N+1}$; подставив в (1) дает

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}} + \ldots\right]$$

(2)

Если lnN уже вычислен с нужной степенью точности, то по формуле (2) можно вычислить ln(N+1). Ряд в правой части (2) сходится тем быстрее, чем больше N; поэтому с возрастанием N вычисление логарифмов становится все более и более простым. При этом вычислить логарифмы простых чисел, ибо логарифмы составных чисел находятся при помощи их. Например, $\ln 6 = \ln 2\cdot 3 = \ln 2 + \ln 3; \ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2;$

Заметим, что приближенная формула: (3)

$$\ln(N+1) \approx \ln N + 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\right]$$

дает по-грешность (ошибку):

$$2\left[\frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)}\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}} + \ldots\right] < 2\left[\frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}} + \ldots\right] <$$

$$\frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left[1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \ldots\right] = \frac{2}{(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\frac{1}{1 - \frac{1}{(2N+1)^2}} = \frac{2}{(2n+2)(2N+1)^{2n-1}\left[(2N+1)^2 - 1\right]} =$$

$$\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n-1}2N(2N+2)} < \frac{1}{(2n+1)N(2N+1)^{2n}}; (4)$$

Для данного числа N по заданной погрешности ξ из неравенства (5)

$$\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n-1}\left[(2N+1)^2-1\right]}\leq\xi$$

можно найти n, а значит, и число членов в приближенной формуле (3)

По приближенной формуле так вычислены приближенные значения логарифмов с точностью до 10^{-5}

$$\ln 2\approx 0{,}69315;\quad \ln 5\approx 1{,}60944;\quad \ln 8\approx 2{,}07944;$$
$$\ln 3\approx 1{,}09861;\quad \ln 6\approx 1{,}79176;\quad \ln 9\approx 2{,}19722;$$
$$\ln 4\approx 1{,}38629;\quad \ln 7\approx 1{,}94591;\quad \ln 10\approx 2{,}30258;$$

Теперь вычислим значение ln11 с точностью до 10^{-5}

Для N=10 и $\xi=10^{-5}$ из (5) определяет n=2

приближенная формула (3) при этом примет вид $\ln 11\approx\ln 10+2\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{21^3}\right).$

Далее, если учесть, что $\ln 10\approx 2{,}302585$ и $2\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{21^3}\right)\approx 0{,}0953098,$ то $\ln 11\approx 2{,}3978952$. Согласно (4)

погрешность будет меньше, чем

$$\frac{1}{5\cdot 10\cdot 21^4}<\frac{1}{5\cdot 10\cdot 20^4}=\frac{1}{2^3\cdot 10^6}<2\cdot 10^{-7}$$

8. Пользуясь степенным биноминальным рядом, вычислить с точностью до 10^{-5} приближенное значение корней из данных чисел, заданных в 8.1 и 8.2

8.1 $\sqrt[9]{522}$

Решение. Прежде всего заметим, что $\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{512+10}=\sqrt[9]{2^9\left(1+\frac{5}{256}\right)}=2\sqrt[9]{1+\frac{5}{256}}$

Далее, пользуясь степенными биноминальным рядом

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)\cdot\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n$$

;

$|x|<1$; (6) при $x=\frac{5}{256}$ и $m=\frac{1}{9}$ получим

$$\left(1+\frac{5}{256}\right)^{\frac{1}{9}}=1+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{256}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2}\cdot\left(\frac{5}{256}\right)^2+\ldots \quad (7)$$

Начиная со второго числа ряда, ряд в (7), представляющий $\left(1+\frac{5}{256}\right)^{1/9}$, знакочередующийся и его члены по абсолютной величине убывают

$$1>\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{256}>\frac{1}{2!}\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2}\cdot\left(\frac{5}{256}\right)^2>\frac{1}{3!}\cdot\frac{1\cdot 8\cdot 17}{9^3}\cdot\left(\frac{5}{256}\right)^3>\ldots$$

Если сумму ряда (7) заменить его частной суммой, то абсолютная величина допускаемой при этом погрешности (ошибки) будет меньше абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Оценим четыре член правой части равенства (7):

$$\frac{1}{3!}\cdot\frac{1\cdot 8\cdot 17}{9^3}\left(\frac{5}{256}\right)^3\langle\frac{1}{27}\left(\frac{5}{256}\right)^3\langle\frac{5}{256^3}\langle\frac{5}{250^3}=\frac{5}{5\cdot 25^5\cdot 10^3}\langle\frac{1}{3}\cdot 10^{-6}$$

Это означает, что $\sqrt[9]{522}$ можно вычислить с точностью до 10^{-5} по приближенной формуле

$$\sqrt[9]{522}=2\left(1+\frac{5}{256}\right)^{1/9}\approx 2\left(1+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{256}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2}\cdot\left(\frac{5}{256}\right)^2\right)$$

Вычисляем

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{256}\approx 0{,}002169, \qquad \frac{1}{2!}\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2}\cdot\frac{5^2}{256^2}\approx 0{,}000191,$$

2(1+0,002169-0,000191) = 2,003956

Таким образом, $\sqrt[9]{522}\approx 2{,}003956$, где четыре знака после запятой точные и погрешность (ошибка) по абсолютной величине не превышает единицы пятого разряда.

8,2 $\sqrt[5]{240}$

Решение. Прежде всего заметим, что

$$\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=\sqrt[5]{243\left(1-\frac{1}{81}\right)}=3\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/5}$$

Далее, пользуясь степенным биноминальным рядом (6) при $x=-\frac{1}{81}, m=\frac{1}{5}$, получим

$$\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/5}=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{81^2}-...$$

Если за приближенное значение суммы $\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/5}$ этого ряда принять значение частичной суммы S_3 (сумму первых трех членов) ряда, то погрешность (ошибка) будет равна остаточному члену R_3, который возьмем в форме Коши

$$\left(R_{n+1}=f(x)-S_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(Qx)(1-Q)^n}{n!}x^n=\frac{m(m-1)(m-2)..(m-n)}{n!}(1+Qx)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-Q}{1+Qx}\right)^n\cdot\right.$$

$$\left.x^n, O\langle Q\langle 1\right):$$

$$\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/5}=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{81^3}+R_3,$$

$$R_3=-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{81^3}\left(\frac{1-Q}{1-\frac{Q}{81}}\right)^2\left(1-\frac{Q}{81}\right)^{-4/5}$$

Оценим R_3 – погрешность замены суммы $\left(1-\frac{1}{81}\right)^{1/5}$ частичной суммы

$$S_3=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{81^3}$$

Так как $\left(\frac{1-Q}{1-\frac{Q}{81}}\right)^2\langle 1,$

$$0\langle\left(1-\frac{Q}{81}\right)^{-4/5}\langle\left(1-\frac{1}{81}\right)^{-4/5}=\left(\frac{81}{80}\right)^{4/5}=\sqrt[5]{\left(\frac{81}{80}\right)^4}\langle\left(\frac{81}{80}\right)^4,$$

то

$$(R_3)\langle\frac{2\cdot 9}{5^3}\cdot\frac{1}{81^3}\cdot\left(\frac{81}{80}\right)^4=\frac{2\cdot 9\cdot 81}{5^3\cdot 80^4}=\frac{2\cdot 9^3}{5^3\cdot 8^4\cdot 10^4}\langle\frac{1}{5^3\cdot 4\cdot 8^3\cdot 10}\langle\frac{1}{25\cdot 10^5}=4\cdot 10^{-7}$$

Следовательно, приближенная формула $\sqrt[5]{240} \approx 3\left(1-\frac{1}{5\cdot 81}-\frac{2}{5^2\cdot 81^2}\right)$ обеспечить точность до 10^{-5}, если второй и третий члены в скобках вычислять с шестью знаками после запятой.

Вычислили

$$\frac{1}{5\cdot 81}\approx 0{,}002469,\ \frac{2}{5^2\cdot 81^2}\approx 0{,}000012$$

Таким образом, $\sqrt[5]{240}\approx 2{,}992557$, где четыре знака после запятой точные и ошибки по абсолютный величине меньше единицы пятого разряда.

9. Пользуясь табличными (известными) разложениями элементарных функций в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена), вычислить (методом выделения главной части)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{-x}-2x}$$

Решение. Пользуясь табличными (известными) разложениями

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots(-\infty\langle x\langle\infty),$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty\langle x\langle\infty),$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\ \frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty\langle x\langle\infty),$$

вычисляем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{-x}-2x}=$

$=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+..\right)}{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\ \frac{x^n}{n!}+\ldots\right)-2x}$$

$=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots}=$$

$$= \frac{1}{2}\lim \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...}{\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...} = \frac{1}{2}$$

10. Пользуясь разложением подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить приближенно с точностью до 10^{-5} определенный интеграл.

$$\int_0^2 b(x)dx, \text{ где } b(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1} & \frac{для.....x \neq 0}{для......x = 0} \end{cases}$$

Решение: Так как функции *f(x)* непрерывна в каждой точке, в том числе и в точке x=0, то интеграл $\int_0^2 f(x)dx$ существует.

Для вычисления данного интеграла мы не можем пользоваться формулой Ньютона-Лейбница, так как первообразная для функции $\frac{\sin x}{x}$ не является элементарной функцией.

Вычислим данный интеграл с заданной точностью. Разложим подынтегральную функцию *f(x)* в степенной ряд. Для всех значений x имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

Даны обе части на $x \neq 0$ получили

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{2!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + ... \qquad (8)$$

Ряд (8) сходится для всех x: при x=0 его сумма равна 1. Так как $f(0) = 1$, то для всех x справедливо равенство

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \qquad (9)$$

Интегрируя (9) почленно в пределах от 0 до 2, найдем

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} ...\right]dx =$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)}+\ldots\right]\Bigg|_0^2$$

$$=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots \qquad (10)$$

Ряд, стоящий в правой части равенства является знакочередующимся рядом, удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница. Поэтому, если за приближенное значение $\int_0^2 f(x)dx$ взято значение n-ой частичной суммы S_n ряда, то абсолютная величина допускаемой при этом погрешности (ошибки) будет меньше абсолютной величины первого из отброшенных членов ряда. По заданной точности ($E=10^{-5}$) находим n из условия.

$$\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\langle 10^{-5}$$

Это неравенство выполняется при n=5, т.к. $\frac{2^{11}}{11\cdot 11!}\langle 10^{-5}$

Взяв в (10) пять первых членов, вычисляем

$$\int_0^2 f(x)dx\approx 2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\frac{2^9}{9\cdot 9!}\approx 1.605417$$

или $\int_0^2 f(x)dx\approx 1.605417,\qquad \left|\int_0^2 f(x)dx-1.605417\right|\langle 10^{-5}$

9.5.Решение дифференциальных уравнений при помощи разложения в ряд

11. Найти решение дифференциального уравнения $y''+\frac{1}{x}y'+y=0,$ удовлетворяющее начальным условиям $y=1, y'=0$ при x=0 (задача Коши).

Решение. Ищем решение данной задачи Коши в окрестности точки x=0 в виде степенного ряда $y=c_o+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots$,

где $c_o, c_1, c_2 \ldots c_n, \ldots$ - неопределенные коэффициенты, подлежащие определению.

Отсюда путем дифференцирования находим

y' =c_1+$2c_2x$+$3c_3x^2$+…+nc_nx^{n-1}+… ,

y'' =$2c_2$+3*$2c_3x$+…+n(n-1)c_nx^{n-1}+… ,

Используя начальные условия y(0)=1, y' (0)= 0, находим c_o=1, c_1=0. Подставив в уравнение $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$ вместо y, y' и y'' соответствующие ряды с учетом c_o=1, c_1=0, получим

$2c_2$+3*$2c_3$+…+n(n-1)c_nx^{n-a}+…+$2c_2$+$3c_3x$+…+nc_nx^{n-1}+… +1+c_2x^2+c_3x^3+…+$c_{n-2}x^{n-2} \equiv 0$

или

($2c_2$+$2c_2$+1)+(3*$2c_3$+$3c_3$)x+(4*3*c_4+$4c_4$+c_2)x^2+…+[n(n-1) c_n+nc_n+c_{n-2}]x^{n-2}+… $\equiv 0$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x левой и правой частей, будем иметь бесконечную систему уравнений

$2c_2+2_2+1=0$

$3*2c_3+3c_3=0$

…

$n(n-1)c_n+nc_n+c_{n-2}=0$, n=4, - ∞

или $4c_2+1=0$, $9c_3=0$

$n^2c_n+c_{n-2}=0$, n=4, - ∞

Отсюда находим $c_2 = -\frac{1}{2^2}$, c_3=0, $c_n = \frac{c_{n-2}}{n^2}$, n=4, - ∞

Таким образом,

c_o=1, c_1=0, $c_2 = -\frac{1}{2^2}$, c_3=0, $c_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}$, c_5=0,

$c_6 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$, c_7=0, $c_8 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2}$, c_9=0,

$c_{10} = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2}$, …

то есть

$c_0 = 0$

$c_n = 0$ при n = 2m-1, m=1, - ∞

$c_n = (-1)^{n/2} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 .. n^2}$ при n=2m, m=1, - ∞

Значит, решение рассматриваемой задачи Коши найдено в виде степенного ряда

$$y = 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} x^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} x^6 + ... + (-1)^m \frac{1}{2^? \cdot 4^? \cdot (2n)^2} x^{2m} + ...$$

(коэффициенты ряда подобраны так, чтобы ряд удовлетворял уравнению и начальным условиям).

Интервал сходимости этого ряда – вся вещественная ось, т.е. ряд сходится при всех значениях x. действительно, так как

$$(c_{2m}) = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 ... (2m)^2}, \qquad (c_{2(m+1)}) = \frac{1}{2^2 ... (2_{m+1})^2},$$

то на основании признака Даламбера радиус сходимости ряда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(c_{(m+1)})}{(c_{2m})}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

9.6.Ряд Фурье

12. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} C_1, & (C_1 - const) \ -e<x<0, \\ C_2, & (C_2 - const) \ 0<x<e \end{cases}$

Решение. Запишем тригонометрический ряд, соответствующий данной функции,

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{e} + b_n \sin\frac{n\pi x}{e})$$

и находим входящие сюда коэффициенты a_0, a_n, b_n, n=1, - ∞ по формулам Эйлера-Фурье

$$a_0 = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)dx = \frac{1}{e}\int_{-e}^{0} c_1 dx + \frac{1}{e}\int_{0}^{e} c_2 dx = c_1 + c_2,$$

$$a_n = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx = \frac{1}{e}\int_{-e}^{0} c_1 \cos\frac{n\pi x}{e}dx + \frac{1}{e}\int_{0}^{e} c_2 \cos\frac{n\pi x}{e}dx = 0 + 0 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}dx = \frac{1}{e}\int_{-e}^{0} c_1 \sin\frac{n\pi x}{e}dx + \frac{1}{e}\int_{0}^{e} c_2 \sin\frac{n\pi x}{e}dx$$

$b_n=0$ при n=2m, m=1, - ∞

$b_n = \dfrac{2(c_2 - c_1)}{nn}$ при n=2m-1, m=1, - ∞

Данная функция кусочно-гладкая, поэтому по основной теореме сходимости ее тригонометрического ряда Фурье:

$$S(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi}$$

$$\sin\frac{\pi x}{e} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{e} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{e} + \ldots$$

причем

$$S(x) = \begin{cases} f(x) = c_1 & \text{при } \ldots -e < x < 0 \\ f(x) = c_2 & \text{при } \ldots 0 < x < e \\ \frac{f(-0) + f(0)}{2} = \frac{c_1 + c_2}{2} & \text{при } \ldots x = 0 \\ \frac{f(-e+0) + f(e+0)}{2} = \frac{c_1 + c_2}{2} & \text{при } \ldots x = \pm e \end{cases}$$

График S(x) изображен на рис. 1

В части, при $c_1 = -1$, $c_2 = 1$:

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{e} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{e} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{e} + \ldots\right)$$

причем

$$S(x) = \begin{cases} f(x) = -1 & \text{при } \ldots -e < x < 0 \\ f(x) = 1 & \text{при } \ldots 0 < x < e \\ \frac{f(-0) + f(0)}{2} = 0 & \text{при } \ldots x = 0 \\ \frac{f(-e+0) + f(e+0)}{2} = 0 & \text{при } \ldots x = \pm e \end{cases}$$

частотный, амплитудно-частотный и фазово-частотный спектры периодического (с периодом T=2e) продолжения функции на $(-\infty, +\infty)$ представляют собой соответственно: $\{\omega_n\}$,

$\omega_n = \frac{n\pi}{e} = n\omega$, $n = 2m-1$, $m = 1, -\infty$, $\omega = \frac{\pi}{e}$ - основная частота

$(\omega = 2\pi\nu, \nu = \frac{1}{2e})$

$\{A_n\}$,

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 + 0^2} = \frac{4}{\pi n} = \frac{4}{m\omega e} = \frac{2}{ne\pi\nu},$$

$n = 2m - 1, \quad m = 1, -\infty;$

$\{\varphi_n\}$, $\qquad -\pi < \varphi_n \le \pi$,

$$\varphi_n = arctg\,\frac{b_n}{a_n} = arctg\,\frac{0}{4} = 0,$$

$n = 2m - 1, \quad m = 1, -\infty;$

На рисунке 2, 3 и 4 приведены графики частичных сумм полученного тригонометрического ряда Фурье соответственно

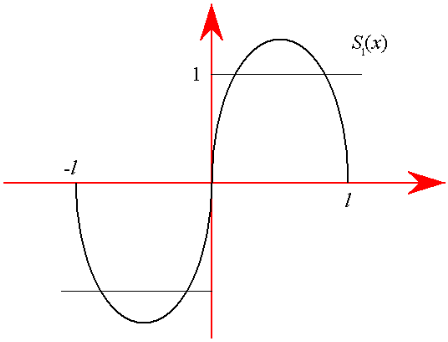


рис. 2.

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{e}$$

$$S_2(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{e} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{e}\right),$$

$$S_3(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{e} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{e} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{e}\right).$$

при условии, что c_1=-1, , c_2 = 1, каждая из которых аппроксимирует заданную функцию (при этом условии)

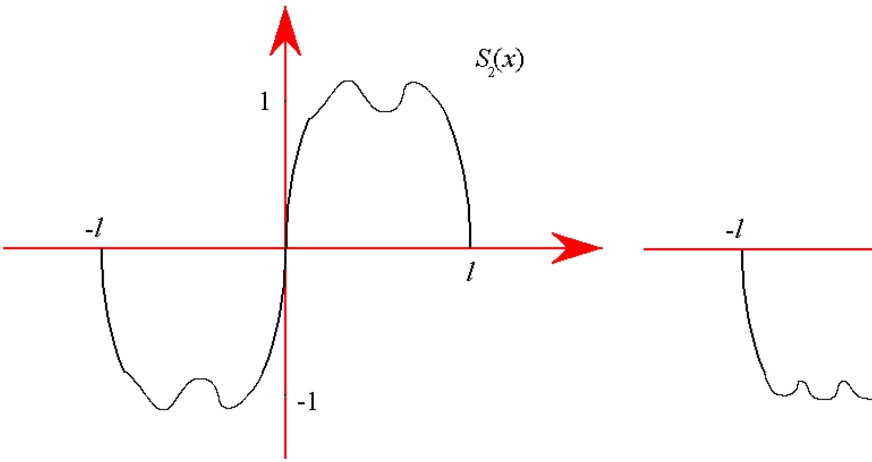


рис. 3.

Погрешность (ошибка) аппроксимации уменьшается с увеличением номера частичной суммы ($S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$…) ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч 2: Учеб. Пособие для ВУЗов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1999. – 416с.: ил.

Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб. для вузов. – 5-е изд., стер.-М.: Высш. Школа. 2001 – 479 с.

Шнейдер В.Е. и др. Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие для вузов. М., “Высш. школа”, 1972 – 640 с.