Глава 2. Функциональные ряды.

§7. Общие понятия.

Определение 7.1. Пусть функции $\mathbf{U_n(x), n \in N}$, определены в области D. Выражение

$$\mathbf{U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), x \in D} \tag{5}$$

называется **функциональным рядом**.

Каждому значению $\mathbf{x_0 \in D}$ соответствует числовой ряд $\mathbf{\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)}$. Этот ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Определение 7.2. Если для $\mathbf{x_0 \in D}$ числовой ряд $\mathbf{\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)}$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (5) сходится в точке $\mathbf{x_0}$, и точку $\mathbf{x_0}$ называют **точкой сходимости**.

Определение 7.3. Если функциональный ряд (5) сходится в каждой точке $\mathbf{x \in E \subset D}$, то этот ряд называется **сходящимся на множестве E,** а множество E называется областью сходимости ряда.

Если множество E пусто, то ряд (5) расходится в каждой точке множества $\mathbf{D}$.

Пример 7.1. Найти область сходимости ряда $\mathbf{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}}$.

Решение. Члены ряда при $\mathbf{x \neq 0}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\mathbf{\dfrac{1}{1+x^2} < 1}$, а при $\mathbf{x = 0}$ все обращаются в ноль. Тогда:

$$\mathbf{S(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ 1 + x^2, \text{ если } x \neq 0. \end{cases}}$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является вся числовая ось $\mathbf{R}$. Заметим, однако, что хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbf{R}$, сумма ряда $\mathbf{S(x)}$ разрывна при $\mathbf{x = 0}$.

Определение 7.4. Если на множестве $\mathbf{E_1 \subset D}$ сходится ряд $\mathbf{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|U_n(x)\right|}$, то ряд (5) называется **абсолютно сходящимся на множестве E$_1$**.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $\mathbf{E_1 \subset E}$.

Определение 7.5. Конечная сумма $\mathbf{S_k = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_k(x) = \sum_{n=1}^{k} U_n(x)}$ называется **частичной суммой** ряда (5), а функция $\mathbf{S = \lim_{n\to\infty} S_n(x)}$, определенная в области $\mathbf{D}$, - **суммой** ряда (5).

Определение 7.6. Функция $\mathbf{r_n(x)}$, определенная в области $\mathbf{E}$ и задаваемая формулой $\mathbf{r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)}$, называется $\mathbf{n}$-м остатком ряда.

Определение 7.7. Сходимость ряда (5) в каждой точке $\mathbf{x \in D}$ называется **поточечной сходимостью**.

Замечание 1. Для нахождения области сходимости функционального ряда (5) используются аналоги признаков Даламбера и Коши сходимости положительных рядов, а именно:

1) находим $\mathbf{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \rho(x)}$ $\left(\mathbf{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x)}\right)$;
2) решаем неравенство $\rho(x)<1$; на множестве его решений ряд (5) сходится абсолютно (на множестве решений неравенства $\rho(x)>1$ ряд расходится);
3) находим множество корней уравнения $\rho(x)=1$. Пусть это будут числа $x_i, i=\overline{1,k}$;
4) для каждого из чисел x_i составляем числовые ряды $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_i)}$ и исследуем их на сходимость (абсолютную и условную);
5) объединение множеств решений неравенства $\rho(x)<1$ и тех чисел x_i, при которых соответствующие числовые ряды сходятся, и будет областью сходимости функционального ряда (5).

Пример 7.2. Найти область сходимости и абсолютной сходимости ряда

$$\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}.$$

Решение. По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится, если

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1},$$

и расходится, если $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1$. При $\frac{1-x}{1+x} = 1$ этот ряд сходится неабсолютно (признак Лейбница), а при $\frac{1-x}{1+x} = -1$ исходный ряд расходится. Решая неравенство $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$, получаем, что ряд абсолютно сходится при $x > 0$.

При x=0 ρ(0)=1 и $U_n(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится условно (не абсолютно).

Итак, область сходимости исходного ряда есть луч $[0;+\infty)$, а область абсолютной сходимости – луч **(0;+∞).**

§8. Равномерная сходимость функционального ряда.

Определение 8.1. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** к функции $S(x)$ в области E, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon): \forall x \in E$

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Замечание 1. Отметим принципиальное отличие равномерной сходимости от поточечной: в случае поточечной сходимости при выбранном значении ε для каждого $x \in E$ существует **свой** номер $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$.

В случае же равномерной сходимости номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ будет общим для всех x.

Пример 8.1. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}$ из примера 7.1. в области $E = R$.

Решение. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $x \neq 0$. Тогда $S_n(x) = \left(1+x^2\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right)$,

и неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} < \varepsilon \text{ выполняется при } n > n_0(\varepsilon, x) = 1 - \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right].$$

Действительно,

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (1+x^2)^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow (n-1)\ln(1+x^2) > -\ln\varepsilon$$

$\Rightarrow n > 1 - \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)} \quad \Rightarrow \quad n_0(\varepsilon, x) = 1 - \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right]$, где выражение в квадратных скобках $[p]$ означает целую часть числа p.

Поскольку

$n_0(\varepsilon, x) = 1 - \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right] \to \infty$ при $x \to 0$ и $0 < \varepsilon < 1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $n_0(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)\ \forall x \in R$.

А это и означает, что сходимость исследуемого ряда в области $E = R$ неравномерная.

Теорема 8.1. (признак Вейерштрасса). Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0,$ сходится и для всех $x \in E$ и для всех n = 1, 2,… выполняется неравенство $|U_n(x)| \leq a_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E.

Доказательство.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что $\forall n > n_0 \quad \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon,$ поэтому

$\forall x \in E$ и $\forall n > n_0$ для остатков r_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ справедлива оценка

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |U_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ равномерно сходится.

Замечание 1. Процедура подбора числового ряда, отвечающего условиям теоремы 8.1, обычно называется **мажорированием**, а сам этот ряд – **мажорантой** для данного функционального ряда.

Замечание 2. Мажорируемость функционального ряда в области E является достаточным условием его равномерной сходимости. Можно показать, что оно не является необходимым.

Замечание 3. Мажорируемость функционального ряда в области E является достаточным условием абсолютной сходимости ряда в этой области. Действительно, из оценки $|r_n(x)|=|\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|U_k(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k<\varepsilon$ следует неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|U_k(x)|<\varepsilon \qquad \forall n>n_0(\varepsilon)\ \forall x\in E,$$

т.е. остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n(x)|$ стремится к нулю при любом $x\in E$, что и является достаточным условием его абсолютной сходимости в области E.

Пример 8.2. Доказать, что функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$, $x\in R$, $\alpha>1$ равномерно сходятся на всей числовой прямой.

Решение. Для данных функциональных рядов существует на R общий мажорантный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который является сходящимся при $\alpha>1$.

Таким образом, согласно признаку Вейерштрасса, функциональные ряды сходятся равномерно на R.

Пример 8.3. Исследуйте на равномерную и абсолютную сходимость на луче $[2;+\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx\cdot\sin\frac{1}{nx}}{4+\ln^2 nx}$.

Решение. Оценим сверху модуль общего члена ряда:

$$\left|\frac{\cos nx\cdot\sin\frac{1}{nx}}{4+\ln^2 nx}\right|\le\frac{1\cdot\frac{1}{nx}}{\ln^2 nx}=\frac{\frac{1}{nx}}{(\ln n+\ln x)^2}\le\frac{\frac{1}{n}}{(\ln n)^2}=\frac{1}{n\ln^2 nx}.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 nx}$ – сходится.

Значит, по мажорантному признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно и абсолютно на луче $[2;+\infty)$.

§9. Нахождение сумм равномерно сходящихся функциональных рядов.

Приведем без доказательства некоторые теоремы о свойствах равномерно сходящихся функциональных рядов.

Теорема 9.1. (о непрерывности суммы функционального ряда). Если на множестве $\mathbf{E}$ функциональный ряд (5) с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма $\mathbf{S(x)}$ непрерывна на $\mathbf{E}$.

Следствие 9.1. Если сумма $\mathbf{S(x)}$ функционального ряда с непрерывными членами разрывна в области $\mathbf{E}$, то сходимость этого ряда заведомо неравномерная в области $\mathbf{E}$. (см. пример 7.1. пособия).

Следствие 9.2. В равномерно сходящемся ряде возможен почленный переход к пределу.

Пример 9.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}$.

Решение. Данный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$, следовательно, он сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, и

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{1/10}{1-1/10}=\frac{1}{9}.$$

Теорема 9.2. (о почленном интегрировании функционального ряда).

Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд сходится на $[a,b]$ равномерно к функции $S(x)$, то интеграл от суммы ряда, взятый по отрезку $[a,b]$, равен сумме ряда, полученного почленным интегрированием:

$$\int_a^b S(t)dt=\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b U_n(x)dx\right].$$

Теорема 9.3. (о почленном дифференцировании функционального ряда). Если члены Функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ и ряд сходится на $[a,b]$ к функции $S(x)$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то исходный ряд сходится равномерно на $[a,b]$, а его сумма $S(x)$ находится по формуле:

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k'(x).$$

Пример 9.2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится при $|x| < 1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$, полученный из него почленным дифференцированием, сходится равномерно при $|x| \le q < 1$ по признаку Вейерштрасса, т.к. он мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1}$, сходящимся по признаку Даламбера.

По теореме 9.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$ для $\forall x \in (-1;1)$.

§10. Степенные ряды. Радиус и круг сходимости степенного ряда

Определение10.1. Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-\alpha)^n, \tag{6}$$

где a_n (n=0,1,2…) и α – действительные числа, y – действительное переменное, называют степенными рядами, а числа a_n – коэффициентом степенного ряда (6).

Полагая в (6) $y - \alpha = x$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{7}$$

исследование сходимости которого эквивалентно исследованию сходимости ряда (6). Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением рядов (7).

Заметим, что всякий степенной ряд (7) сходится в точке x=0, а его сумма $S(0)=c_0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 11.1(**1-я теорема Абеля**). Если степенной ряд (7) сходится при $x = x_0$, то при любом x: $|x| < |x_0|$ ряд (7) сходится абсолютно. Если же ряд (7) расходится при $x = x_0$, то он расходится при любом x: $|x| > |x_0|$.

Доказательство.

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$ поэтому существует константа $c > 0$: $|a_n x_0^n| \le c \quad \forall n$.

Следовательно, $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le c\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ при $|x|<|x_0|$ сходится, так как является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд (7) при $|x|<|x_0|$ абсолютно сходится.

Далее, если бы ряд (7) сходился точке $x : |x| > |x_0|$, то по доказанному выше он сходился бы абсолютно в точке x_0, что противоречит условию.

Таким образом, если найти наибольшее из чисел $x_0 > 0$ таких, что ряд (7) сходится при $x = x_0$, то областью сходимости данного ряда, как следует из теоремы Абеля, будет интервал $(-x_0, x_0)$, возможно, включающий одну или обе границы.

Определение 11.2. Число $R \ge 0$ называется **радиусом сходимости** степенного ряда (7), если $\forall x : |x| < R$ этот ряд сходится, а $\forall x : |x| > R$ расходится. Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости** ряда (7).

Если ряд (7) сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0;$ если же ряд (7) сходится для всех $x \in R$, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда используют признаки Даламбера и Коши (см. § 3 настоящего пособия).

Получим формулы для нахождения R.

1. Формула Даламбера.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ и применим к нему признак Даламбера: для сходимости ряда необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, то область сходимости определяется неравенством $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то есть

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$ - **формула Даламбера** для вычисления радиуса сходимости.

2. Формула Коши-Адамара.

Используя радикальный признак Коши и рассуждая аналогичным образом, получим, что можно задать область сходимости степенного ряда как множество решений неравенства $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ при условии существования этого предела, и, соответственно, найти еще одну формулу для радиуса сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$ - **формула Коши-Адамара**.

Область сходимости степенного ряда будем находить по следующей схеме:

а) Определяем радиус R сходимости степенного ряда по формулам Даламбера или Коши-Адамара. Тогда ряд сходится абсолютно в промежутке (-R , R).

б) Проверяем поведение ряда в граничных точках найденного интервала сходимости.

Пример 10.1.

Найти интервал сходимости ряда $x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \frac{x^4}{400} + \ldots + \frac{x^n}{n10^{n-1}} + \ldots$

Решение.

а) Радиус R сходимости ряда находим по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 10^n}{n\cdot 10^{n-1}} = 10 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 10$ **т.е.** $R = 10.$ Значит, данный сходится при значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < 10$ **или** $-10 < x < 10.$

б) Исследуем теперь поведение ряда на концах промежутка.

При $x = 10$, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n} = 10\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$ Это гармонический ряд, который расходится.

При $x = -10$ получим числовой знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10}{n}$, который сходится условно по признаку Лейбница.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $-10 \le x < 10$ и его интервал сходимости представляет собой полузамкнутый интервал $[-10,10)$.

Пример 10.2. Найти радиус сходимости рядов а) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. а) Для исследования абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\,x^{n+1}|}{|n!\,x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases} \infty, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Следовательно, ряд сходится только при $x = 0$, и радиус сходимости $R = 0$.

б) Используя тот же признак Даламбера, можно показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится при любом x , то есть $R = \infty$.

Для степенных рядов вида (6) нахождение радиуса сходимости производится аналогично.

Пример 10.3. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{n\,5^n} = 5$, т.е. интервал сходимости

$-5 < x - 3 < 5$, откуда $-2 < x < 8$.

При $x = -2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

При $x = 8$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

§11. Свойства степенных рядов.

Ограничимся изучением некоторых свойств степенного ряда (7).

Теорема 11.1 (2-я теорема Абеля). Если R – радиус сходимости ряда (7) и этот ряд сходится при $x = R$, то он равномерно сходится на интервале $(-R, R)$.

Доказательство.

$\forall \rho : 0 < \rho < R$ знакоположительный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ сходится по 1-ой теореме Абеля. Следовательно, ряд (7) по признаку Вейерштрасса равномерно сходится в интервале [-ρ, ρ]. Из выбора ρ следует, что интервал равномерной сходимости – **(-R, R)**, что и требовалось доказать.

Следствие 11.1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма ряда (7) есть непрерывная функция.

Доказательство. Члены ряда (7) являются непрерывными функциями, и ряд равномерно сходится на рассматриваемом отрезке. Тогда непрерывность его суммы следует из теоремы 9.1.

Следствие 11.2. Если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx.$$

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 9.2.

Теорема 11.2. Если ряд (7) имеет интервал сходимости $(-R, R)\ (R \neq 0)$, то на этом интервале его можно почленно дифференцировать, и для его суммы справедливо равенство: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.

Без доказательства.

Теорема 11.3. Если ряд (7) имеет интервал сходимости **(-R, R)**, то на этом интервале можно почленно интегрировать любое число раз.

Без доказательства.

Пример 11.1. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ..., \qquad (*)$$

получаемый из исходного почленным дифференцированием. Так как члены этого ряда представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $-x^2$, то его сумма $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ при $|x| < 1$.

Интегрируя (*) почленно на отрезке $[0;x]\subset]-1;1[$, получаем:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; t^{2n} \; dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

С другой стороны $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \mathbf{arctg\,x}.$

Таким образом, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \mathbf{arctg}\,x, \quad |x| < 1.$

Контрольные вопросы к §7-11.

1. Дайте понятие функционального ряда, его области определения и области сходимости.
2. Сформулируйте алгоритм нахождения области сходимости функционального ряда.
3. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.
4. Сформулируйте признак Вейерштрасса и следствие из него равномерной сходимости функционального ряда.
5. Сформулируйте теоремы о свойствах равномерно сходящихся функциональных рядов.
6. Дайте понятие степенного ряда, его области определения и области сходимости.
7. Сформулируйте алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда.
8. Запишите формулы Даламбера и Коши – Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
9. Сформулируйте теоремы о свойствах степенных рядов.

Типовые примеры к § 7-11.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Решение. Члены данного ряда определены для всех значений $\mathbf{x}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n} \right| = \left|\frac{x}{2}\right|.$$

Решением неравенства $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ является интервал (-2;2).

Исследуем сходимость ряда на границах: при x=-2 и при x=2.

Если x=-2, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{-2}{2})^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости. Тот же результат получим при x=2. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал (-2,2).

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$.

Решение. Члены $U_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$ исходного ряда не определены при x=-1. Предположим $x \neq -1$ и найдем предел

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^{2(n+1)+1}} : \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2+x^{2n+3}}{1+x^{2n+3}}\right| = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x|<1, \\ 1 & \text{при } x=1 \text{ или } |x|>1. \end{cases}$$

Следовательно, области абсолютной сходимости исходного ряда будут принадлежать значения **x ,** удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} |x|<1 \\ x^2<1 \end{cases}$$

значит, **-1<x<1,** а при **x=1** или $|x|>1$ требуется дополнительное исследование

Так как

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{1+x^{2n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } x=1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } |x|>1 \end{cases}$$

отличен от нуля, то при любом фиксированном $|x|>1$ или **x=1** исходный ряд расходится.

Т.о., исходный ряд абсолютно сходится в точках интервала (-1;1), а во всех остальных точках расходится.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

Решение. Члены $U_n(x)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ данного ряда определены для всех $x\neq-\frac{1}{2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n\right|}=\left|\frac{x}{2x+1}\right|$, то исходный ряд сходится абсолютно при $\left|\frac{x}{2x+1}\right|<1$.

Решениями последнего неравенства являются решения системы неравенств

$\begin{cases}\frac{x}{2x+1}<1\\ \frac{x}{2x+1}>-1\end{cases}$. Решая эту систему, получаем, что исходный ряд сходится абсолютно при **x<-1** или **x>-1/3** . При **x=-1** и **x=-1/3** соответственно получаем числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$, которые расходятся.

Итак, исходный ряд сходится при $x\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$, притом абсолютно.

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x^2}$.

Решение. Члены ряда определены для всех $x\in R$. При x=0 ряд сходится. Покажем, что при любом $x\neq0$ он расходится. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x^2}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x^2}:\frac{1}{n}\right)=1$.

Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x^2}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x^2}$ также расходится при $x\neq0$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{\sqrt[4]{2n}}x^{2n}\sin(x-n\pi)$.

Решение. Учитывая справедливость равенства $\sin(x-n\pi)=(-1)^n\sin x, n\in N,$ общий член данного ряда можно переписать в виде

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n 3^{2n}}{\sqrt[4]{2n}}x^{2n}\sin x.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}3^{2(n+1)}}{\sqrt[4]{2(n+1)}}x^{2(n+1)}\sin x : \frac{(-1)^n 3^{2n}}{\sqrt[4]{2n}}x^{2n}\sin x\right| = 9x^2,$$ то

исходный ряд абсолютно сходится при $9x^2<1$, т.е. при $|x|<\frac{1}{3}$.

При $x=1/3$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sin\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n}}$, который, по теореме Лейбница, сходится. Но ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда, расходится, значит, знакочередующийся ряд сходится условно.

При $x=-1/3$ получаем ряд $\sin\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n}}$, который также условно сходится.

Итак, исходный ряд сходится при $x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, притом абсолютно при $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Пример 6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}\mathrm{tg}^n 2x$.

Решение. Члены ряда $U_n(x)=\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}\mathrm{tg}^n 2x$ определены для $x\neq\frac{\pi}{4}(2k+1), k\in Z.$

При этих значениях **x** имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}\mathrm{tg}^n 2x\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{1/n}\cdot 3^{1/2}}{n^{1/2n}}|\mathrm{tg}2x| = \sqrt{3}\mathrm{tg}2x.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} n^{1/2n}=1$ (см. решение примера 7 задания 6), то исходный ряд сходится абсолютно, если $\sqrt{3}|\mathrm{tg}2x|<1,$ т.е. $-\frac{1}{\sqrt{3}}<\mathrm{tg}2x<\frac{1}{\sqrt{3}}$, значит, при $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k, k\in Z$.

При $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z,$ получаем расходящийся числовой ряд $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}},$ а при $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z,$ - условно сходящийся ряд $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}.$

Таким образом, исходный ряд сходится при $x \in \left[\frac{\pi}{12}(6k-1), \frac{\pi}{12}(6k+1)\right), k \in Z$ причем, при $x \in \left(\frac{\pi}{12}(6k-1), \frac{\pi}{12}(6k+1)\right), k \in Z$, абсолютно.

Пример 7. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{\sqrt{x+2}}3^{-n^4 \arcsin\frac{3}{n^2|x|}}.$

Решение. Все члены данного ряда $U_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+2}}3^{-n^4 \arcsin\frac{3}{n^2|x|}} (n = 1,2,...)$ определены при $x \in [3,+\infty)$.

Для всех $x \neq 0$ $\arcsin\frac{3}{n^2|x|} \sim \frac{3}{n^2|x|}$ при $n \to \infty$, значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{x+2}} \cdot 3^{-\frac{3n^2}{|x|}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{3n/|x|}(x+2)^{1/2n}} = 0 < 1$$ при всех $x \in [3,+\infty)$.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $[3,+\infty)$, притом сходимость всюду абсолютная.

Пример 8. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}.$

Решение. Члены ряда $U_n(x) = \left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$ определены при $x \neq 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}} = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 4^{-\frac{n}{x}} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \infty, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится для $x \in (0,+\infty)$.

Пример 9. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

Решение. Так как общий член ряда $U_n(x)=\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)^5 x^{2n+2}}{2n+3}:\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}\right]=x^2,$$

то ряд сходится абсолютно при $x^2<1$, т.е. в интервале **(-1,1).**

При **x=±1** имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}$ расходится, так как общий член этого ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Т.о., областью сходимости исходного ряда является интервал (-1,1), притом сходимость всюду абсолютная.

Пример 10. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2+x^{2n}}$.

Решение. Имеет место три возможных случая.

При $|x|<1$ $\left|\frac{x^n}{2+x^{2n}}\right|=\frac{|x^n|}{2+x^{2n}}\le|x|^n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ сходится при $|x|<1$, то и исходный ряд сходится для $|x|<1$.

Для $|x|>1$ $\left|\frac{x^n}{2+x^{2n}}\right|\le\left|\frac{x^n}{x^{2n}}\right|=\frac{1}{|x|^n}$, а ряд сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^{-n}$ сходится для $|x|>1$, то и исследуемый ряд сходится при тех же условиях.

Если $x=1$ или $x=-1$, то $|u_n(1)|=\frac{1}{3}$ и ряд расходится.

В итоге, исследуемый ряд сходится на всей числовой оси, кроме точек $x=-1$ и $x=1$.

Пример 11. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}$.

Решение. Применим к данному ряду признак Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)2^x=2^x<1$, что возможно при $x<0$.

Случай $2^{x}=1$, т.е. $x=0$, исследуем особо. При $x=0$ исследуемый ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Этот ряд расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\neq 0.$

В итоге, исследуемый ряд сходится при $x<0.$

Пример 12. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^{2}}}x^{n}$ при $a>1$.

Решение. По признаку Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!a^{(n+1)^{2}}}{(n+1)!a^{n^{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=\infty,$

что означает, что ряд сходится на всей оси x.

Пример 13. Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{\sqrt[3]{n^{3}-6}}$ на отрезке $[0,1]$. При каких n абсолютная величина остатка ряда не превосходит 0,1 для всех $x\in[0,1]$?

Доказательство. При любом фиксированном $x\in[0,1]$ исходный ряд является знакочередующимся рядом , члены которого , начиная со второго, по абсолютной величине монотонно убывают и n-й член стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, этот ряд сходится, и сумма его остатка не превосходит первого члена этого остатка по абсолютной величине:

$$|R_{n}(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{k}}{\sqrt[3]{k^{3}-6}}\right|\leq\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)^{3}-6}}(n=2,3,4...),$$

значит, для всех $x\in[0,1]$ $|R_{n}(x)|\leq\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^{3}-6}}$.

Взяв любое $\varepsilon>0$, подберем n так, чтобы $\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^{3}-6}}<\varepsilon,$ отсюда

$n>\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon^{3}}+6}-1$.

Положив, таким образом, $N=\left[\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon^{3}}+6}-1\right]$, мы убеждаемся, что при n>N, действительно, $|R_{n}(x)|<\varepsilon$ для всех x из отрезка $[0,1]$. Тем самым равномерная сходимость исходного ряда на отрезке $[0,1]$ доказана.

Так как для любого $x\in[0,1]$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3-6}} \le 0{,}1$$

при

$$n \ge \sqrt[3]{\frac{1}{(0{,}1)^3}+6}-1 \approx 8{,}98$$

и n является натуральным числом, то абсолютная величина исходного ряда не превосходит 0,1 для всех $x \in [0{,}1]$ при n=9,10,11…

Пример 13. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)} \text{ на отрезке } [-2{,}0].$$

Доказательство. Так как $|x+1| \le 1$ при $x \in [-2{,}0]$, то

$$\left|\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right| \le \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} (n=1,2,3...).$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ **с** положительными членами сходится . Действительно, функция $f(x) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ в промежутке $[1,+\infty)$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши и $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} (n=1,2,3...)$, причем несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1} = \frac{1}{\ln 2}$ сходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ является **мажорирующим** для исходного ряда на отрезке $[-2{,}0]$, следовательно, исходный ряд сходится на этом отрезке равномерно и абсолютно.

Пример 14. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$.

Доказательство. Так как $|\cos nx| \le 1$ на всей числовой оси, то $\left|\frac{\cos nx}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n}$ $(n = 1,2,3\ldots)$, т.е. числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ мажорирует исследуемый функциональный ряд. Члены числового ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/3$ (геометрический ряд). Геометрический ряд сходится при $q < 1$, следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, исследуемый ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси.

Пример 15. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$.

Решение. Обозначим сумму ряда $\varphi(x)$ и продифференцируем ряд почленно:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

После интегрирования получим

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

Пример 16. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$.

Решение. Интегрируя дважды почленно в пределах от 0 до x при $|x| < 1$ геометрический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}$, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)} = \int_0^x \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)} = -\frac{1}{2}\int_0^x \ln(1-x^2)dx.$$

Последний интеграл возьмем по частям, полагая

$$U = \ln(1-x^2), dU = -\frac{2xdx}{1-x^2}, dV = dx, V = x:$$

$$\int_0^x \ln(1-x^2) = (x\ln(1-x^2))\Big|_0^x - 2\int_0^x \frac{-x^2dx}{1-x^2} = x\ln(1-x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right)dx =$$

$$x\ln(1-x^2) - 2\left(x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^x = x\ln(1-x^2) - 2x + \ln\frac{1+x}{1-x},$$

следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)}=x-\frac{1}{2}x\ln(1-x^2)-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

отсюда при $x\neq 0, |x|<1$ сумма исходного ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}1-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Очевидно, что S(0)=0 и

$$S(-1)=S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

Известно, что для всех $x\in(-1;1]$ имеет место равенство

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\ldots,$$

и, в частности, при x=1

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\ldots,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\ldots=1-\ln 2.$$

Сравнивая это выражение с выражением для S(-1), получаем S(-1)=S(1)=1-ln2.

Таким образом, исходный ряд сходится на отрезке $[-1,1]$ и его сумма равна

$$S(x)=\begin{cases}0, x=0\\ 1-\frac{1}{2}(1-x^2)-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, 0<|x|<1\\ 1-\ln 2, |x|=1\end{cases},$$

а во всех остальных точках расходится.

Пример 17. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{ctg}^n x}{(n-1)n}$.

Решение. Рассмотрим сходящийся при $|y|<1$ геометрический ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} y^{n-2} = \frac{1}{1-y}.$$

Интегрируя дважды этот ряд в пределах от 0 до у при $|y| < 1,$ находим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{n-1} = \int_0^y \frac{dy}{1-y} = -\ln(1-y),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n}}{(n-1)n} = -\int_0^y \ln(1-y)dy.$$

Положим $U = \ln(1-y), dU = -\dfrac{dy}{1-y}, dV = dy, V = y,$ тогда по формуле интегрирования по частям получаем

$$\int_0^y \ln(1-y)dy = y\ln(1-y) - \int_0^y \frac{-ydy}{1-y} = y\ln(1-y) - \int_0^y \left(1 - \frac{1}{1-y}\right)dy =$$

$$y\ln(1-y) - y - \ln(1-y) = (y-1)\ln(1-y) - y,$$

следовательно, при $|y| < 1$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n}}{(n-1)n} = y + (1-y)\ln(1-y).$

При у=1 имеем $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$

Его частичная сумма стремится к единице:

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \to 1, k \to \infty,$$

значит, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1.$

Далее, при у=-1 находим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \ldots =$$

$$1 + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \ldots\right) = 1 + 2(\ln 2 - 1) = 2\ln 2 - 1$$

(аналогично примеру 15 этого задания).

Таким образом, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)n}=\begin{cases} y+(1-y)\ln(1-y), |y|<1 \\ 1, y=1 \\ 2\ln 2-1, y=-1 \end{cases}$

Для данного ряда, полагая **y=ctgx** в полученном соотношении, имеем:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ctg^n x}{(n-1)n}=\begin{cases} ctgx+(1-ctgx)\ln(1-ctgx), & |ctgx|<1 \\ 1, & ctgx=1 \\ 2\ln 2-1, & ctgx=-1 \end{cases}$$

или

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ctg^n x}{(n-1)n}=\begin{cases} ctgx+(1-ctgx)\ln(1-ctgx), & \frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k \\ 1, & x=\frac{\pi}{4}+\pi k \\ 2\ln 2-1, & x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z, \end{cases}$$

а во всех остальных точках исходный ряд расходится.

Задания к § 7-11.

После изучения § 7-12 выполните задания 12-17 из главы 3 настоящего пособия.

§12. Ряды Тейлора.

До сих пор, изучая степенные ряды, мы интересовались областью сходимости степенных рядов и изучением свойств суммы степенных рядов.

Рассмотрим обратную задачу: пусть дана функция $\mathbf{f(x)}$ на интервале $(\mathbf{x_0-R, x_0+R})$. Можно ли эту функцию представить на этом интервале в виде степенного ряда

$\mathbf{f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots}$, сходящегося к $\mathbf{f(x)}$ как к своей сумме?

Примером решения такой обратной задачи может служить пример 11.1. настоящего пособия, в котором функцию **arctg x** представили в виде степенного ряда при $|\mathbf{x}|<\mathbf{1}$.

Определение 12.1. Представление функции в виде

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad a_n=\text{const} \tag{8}$$

называется ее **разложением в степенной ряд**.

Теорема 12.1. Если функция **f** раскладывается в некоторой окрестности точки $\mathbf{x_0}$ в степенной ряд (8), то $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, т.е. справедлива формула

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{9}$$

Доказательство.

Дифференцируя **m** раз равенство (8), получим:

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_m+(m+1)m\ldots 2a_{m+1}(x-x_0)+$$
$$+(m+2)(m+1)\ldots 3a_{m+2}(x-x_0)^2+\ldots$$

Примем $\mathbf{x = x_0}$, тогда $\mathbf{f^{(m)}(x_0) = m!a_m}$, что доказывает формулу (9).

Следствие 12.1. Если в некоторой окрестности заданной точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.

Действительно, из теоремы 13.1 следует, что коэффициенты степенного ряда могут иметь только вид, задаваемый формулой (9).

Определение 12.2. Пусть функция $\mathbf{f(x)}$ определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x_0}$ и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется **рядом Тейлора,** а разложение функции $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - **разложением функции в ряд Тейлора**.

Определение 12.3. Если при разложении в ряд Тейлора принимается $x_0=0$, то полученный ряд $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называется **рядом Маклорена.**

Разлагаемая функция имеет вид:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \text{ - ряд Тейлора,} \tag{10}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \quad \text{ - ряд Маклорена.} \tag{11}$$

Исследуем теперь условия разложимости функции **f(x)** в ряд Тейлора (10). Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции **f(x)** в точке x_0

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x), \tag{12}$$

которая справедлива при любом n=0,1,2,….

В этой формуле $r_n(x)$ назовём **остаточным членом формулы Тейлора** для функции **f** в точке x_0. Подчеркнем различие остаточного члена формулы Тейлора $r_n(x)$ от остаточного члена ряда Тейлора $R_n=S(x)-S_n(x)$.

Обозначим $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$,

тогда $r_n(x)=f(x)-S_n(x)$, где $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда Тейлора.

Если существует $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$, то, согласно определению сходимости ряда, ряд (10) сходится к функции **f(x)** в точке **x**, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Теорема 12.2. Пусть функция **f(x)** определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка **(n+1)** на интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$, $R>0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ её формулы Тейлора (12) для всех $x\in(x_0-R,\ x_0+R)$ можно записать в следующих трёх видах:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt, \qquad (13)$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ где } \xi\in(x_0;x), \qquad (14)$$

и

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \text{ где } 0<\theta<1. \qquad (15)$$

Формула (13) называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, формула (14) – в форме Лагранжа, а (15) – в форме Коши.

Без доказательства.

Теорема 12.3. Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Доказательство. Если ряд Тейлора сходится к $S(x)\neq f(x)$, то из равенств $r_n(x)=f(x)-S_n(x)$ и $R_n=S(x)-S_n(x)$ следует, что $r_n(x)\neq R_n(x)$.
Если же $S(x)=f(x)$, то, очевидно, $r_n(x)=R_n(x)$.

Теорема 13.4. (достаточное условие разложения функции в степенной ряд). Если функция **f** и все её производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0–R, x_0+R)$, т.е. существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x\in(x_0–R, x_0+R)$ и всех $n=0,1,2,\dots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)|\le M,$$

то функция **f** представляется рядом Тейлора (10), сходящимся в каждой точке интервала $(x_0–R, x_0+R)$.

Без доказательства.

§13. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Найдём разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$, т.е. в ряд Маклорена (11):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{x!}x^n .$$

При этом применим приём непосредственного разложения функции **f** в ряд Тейлора, который состоит в следующем:

а) формально составляем ряд Тейлора для функции $\mathbf{f(x)}$; с этой целью вычисляем производные всех порядков функции $\mathbf{f(x)}$ в точке $\mathbf{x=x_0}$ и подставляем в разложение

$$\mathbf{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots;}$$

б) находим область сходимости полученного ряда: $\mathbf{x\subset E}$;

в) выясняем, для каких значений $\mathbf{x}$ из области сходимости полученный ряд сходится к данной функции, для чего оцениваем остаточный член и проверяем выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{r_n(x)=0}$.

13.1. Показательная функция.

Так как для функции $\mathbf{f(x)=e^x}$ справедливы следующие соотношения: $\mathbf{f(0)=1}$, $\mathbf{f'(0)=1}$, … $\mathbf{f^{(n)}(0)=1}$ $\mathbf{n\in N}$, то по формуле (11) получается разложение в ряд Маклорена показательной функции

$$\mathbf{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots} \quad .$$

Для нахождения области сходимости этого ряда воспользуемся признаком Даламбера:

$\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = 0<1,}$ т.е. полученный ряд сходится на всей числовой оси; в силу необходимого признака сходимости ряда $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0.}$

Оценим остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа (14):

$$\mathbf{r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\,x^{n+1}}, \text{ где } \mathbf{\xi\in(0;x)}.$$

В силу того, что функция $\mathbf{f(x)=e^x}$ монотонно возрастает по мере роста показателя, имеем $\mathbf{e^{|\xi|}<e^{|x|}}$, откуда следует, что

$$\mathbf{|r_n(x)|=\frac{e^{|\xi|}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}|r_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| = 0$$ в силу необходимого признака сходимости ряда. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится к функции e^x на всей числовой прямой **R**.

Итак, для функции $f(x)=e^x$ справедливо следующее разложение:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad \forall x \in (-\infty;\infty).$$

13.2. Тригонометрические функции.

1) Если $f(x)=\sin x$, то с учетом того, что $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, имеем при

$$x = 0: \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k, \\ (-1)^{k-1}, \text{ если } n = 2k+1, \end{cases} \qquad n \in N.$$

По формуле (11) получаем разложение синуса в ряд Маклорена:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .... \ .$$

Для нахождения области сходимости этого ряда воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!\,x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{2(n+1)(2n+3)}\right| = 0 < 1,$$ т.е. полученный ряд сходится на всей числовой оси; в силу необходимого признака сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = 0.$$

Оценим остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа (14):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1} = \frac{\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \text{ где } \xi \in (0;x).$$

В силу того, что $\left|\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}|r_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| = 0$ в силу необходимого признака сходимости ряда. Следовательно, полученный ряд сходится к функции **f(x)=sin** ***x*** на всей числовой прямой **R**.

Итак, для функции **f(x)=sin** ***x*** справедливо следующее разложение:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - ... \,,\ \forall x \in (-\infty;\infty).$$

2) Пусть **f(x)=cos** ***x***. Из равенства $\cos x = (\sin x)'$, используя теорему 12.2. о почленном дифференцировании степенного ряда, получаем:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + ... \,, \qquad \forall x \in (-\infty;\infty).$$

13.3. Степенная функция

Пусть $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

Если $\alpha = 0$, то $f(x) \equiv 1$ и разложение в ряд Маклорена тривиально:

$$f(x) \equiv 1 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n, \quad x \in R.$$

Если $\alpha = n$, где $n \in N$, то **f(x)** – многочлен степени **n**, который можно записать по формуле бинома Ньютона в виде конечной суммы

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^k$, где $C_{\alpha}^{k} = \dfrac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$, и разложение в ряд Маклорена можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot x^{n+k}, \quad x \in R.$$

Покажем, что если $\alpha \notin N$ и $\alpha \neq 0$, то функция $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ представляется при каждом $x \in (-1,1)$ сходящимся к ней рядом

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^n, \qquad \text{где } C_{\alpha}^{0} = 1,\ C_{\alpha}^{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

Действительно, легко заметить, что n-ая производная для всех $x \in (-\infty;\infty)$, $x \neq 1$, имеет вид: $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad n \in N.$

(В точке $\mathbf{x=1}$ n-ая производная функции не существует, если $\mathbf{n>\alpha}$).

Следовательно, ряд Маклорена функции $\mathbf{f(x)=(1+x)^{\alpha}}$ при $\alpha\notin\mathbf{N}$ и $\alpha\neq\mathbf{0}$ имеет вид:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}.$$

Заметим, что ряды Маклорена для $\alpha=\mathbf{0}$ **и** $\alpha=\mathbf{n}$ являются частным слу-чаем этого ряда, поскольку при $\alpha=\mathbf{0}$ все коэффициенты этого ряда равны нулю, а при $\alpha=\mathbf{n}$ эти коэффициенты равны нулю, начиная с номера $\mathbf{n=\alpha+1.}$

Найдем область сходимости полученного ряда по признаку Даламбера. Если ввести обозначение $f_{n,\alpha}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1)}{n!},\quad n\in\mathbf{N},$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1,\alpha}\ x^{n+1}}{f_{n,\alpha}\ x^{n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(n+1)!\,x^{n+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\alpha-(n+1-1)n!\,x^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{\alpha-n}\right|=|x|.$$

Таким образом, ряд Маклорена функции $\mathbf{f(x)=(1+x)^{\alpha}}$ при $|x|<1$ абсолютно сходится, а при $|x|>1$ расходится.

Итак, для функции $\mathbf{f(x)=(1+x)^{\alpha}}$ справедливо следующее разложение:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+...,\quad\forall x\in(-1,1).$$

Отметим важные частные случаи полученного разложения:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}=1-x+x^{2}-x^{3}+...+(-1)^{n}x^{n}+...,\quad\forall x\in(-1;1),$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+...+x^{n}+...,\quad\forall x\in(-1;1).$$

13.4. Логарифмическая функция

Пусть $\mathbf{f(x)=\ln(x+1)}$. Функция определена на интервале (–1,+∞). Производная функции $\mathbf{f'(x)=\dfrac{1}{1+x}}$.

Разложение этой функции можно получить, интегрируя почленно ряд Маклорена функции $\mathbf{f(x)=\frac{1}{1+x}}$ (см. теорему 13.3.):

$$\ln(x+1)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ x\in(-1;1).$$

В точке $\mathbf{x=-1}$ данная формула неверна (в этой точке и сама функция $\mathbf{f(x)=\ln(x+1)}$ не определена), и ряд расходится, поскольку является гармоническим.

В точке $\mathbf{x=1}$ полученная формула справедлива. Действительно, функция $\mathbf{f(x)=\ln(x+1)}$ в этой точке определена и равна $\mathbf{\ln 2}$, а ряд Маклорена при $\mathbf{x=1}$ представляет собой сходящийся условно в силу признака Лейбница ряд (см. пример 5.3.).

Итак, для функции $\mathbf{f(x)=\ln(x+1)}$ справедливо следующее разложение:

$$\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+...,\ \forall x\in(-1;1].$$

§14. Методы разложение функций в ряд Тейлора.

В предыдущем параграфе мы установили пять стандартных разложений с использованием метода непосредственного разложения, который зачастую приводит к громоздким и трудоемким вычислениям.

Укажем теперь другие методы, которые помогают избежать указанные трудности, используя некоторые вспомогательные приемы. Проиллюстрируем их применение на конкретных примерах.

14.1. Метод, использующий формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 14.1. Разложить в ряд Тейлора в окрестностях точки $\mathbf{x_0=-2}$ функцию $\mathbf{f(x)=\frac{1}{1+x}}$.

Решение. Т.к. $\mathbf{f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+(x+2)-2}=-\frac{1}{1-(x+2)}}$, то при $\mathbf{|x+2|<1}$ имеем: $\mathbf{\frac{1}{1+x}=-\left(1+(x+2)+(x+2)^2+...+(x+2)^n+...\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n\ \forall x\in(-3;-1).}$

14.2. Метод подстановки.

Пример 14.2. Разложить в ряд Тейлора по степеням $\mathbf{x-\pi/4}$ функцию $\mathbf{f(x)=\sin 2x}$.

Решение. Имеем:

$$\sin 2x = \left|\begin{matrix} x-\pi/4 = t \\ x = t+\pi/4 \end{matrix}\right| = \sin 2(t+\pi/4) = \cos 2t = [2t = u] = \cos u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}.$$

Возвращаясь к старой переменной **x** по формуле $\mathbf{u=2(x-\pi/4)}$, получаем:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}(x-\pi/4)^{2n} \quad \forall x\in R.$$

14.3. Метод интегрирования.

Пример 14.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $\mathbf{f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}}$.

Решение. Т.к. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$, а $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \quad \forall t\in(-1;1)$, то

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\right)dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in(-1;1).$$

14.4. Метод дифференцирования.

Пример 14.4. Разложить в ряд Маклорена функцию $\mathbf{f(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}}$.

Решение. Т.к. $\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)'$, а $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \forall x\in(-1;1)$, то

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)' = (1+x^2+x^4+...+x^{2n}+...)' =$$

$$= 2x + 4x^2 + ... + 2n\,x^{n-1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} 2n\,x^{2n-1} \quad \forall x\in(-1;1).$$

Контрольные вопросы к §13-15.

1. Сформулируйте определение разложения функции в ряд Тейлора и в ряд Маклорена.
2. Запишите остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме, в форме Лагранжа и Коши.
3. Сформулируйте необходимое и достаточное условия разложения функции в ряд Тейлора.
4. Укажите ряды Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$, а также интервалы, в которых указанные функции разлагаются в ряды Маклорена.
5. Назовите способы разложения функций в ряд Тейлора.

Типовые примеры к § 13-15.

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

а) $e^{\sqrt{x}}$, б) e^{x^2}.

Решение. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

а) $$e^{\sqrt{x}} = 1 + \frac{\sqrt{x}}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x\sqrt{x}}{3!} + \ldots + \frac{(\sqrt{x})^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sqrt{x}\right)^n,$$

б) $$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Ряды сходятся к данной функции при всех значениях **x**.

Пример 2. Разложить функции $\sin 2x$ и $\sin^2 x$ в ряд Маклорена.

Решение.

а)

$$\sin(2x) = \frac{2x}{1!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

б) $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$

$$\sin^2 x = \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + \frac{(2x)^6}{2\cdot 6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Ряды сходятся к данной функции при всех значениях **x**.

Пример 3. Разложить функцию $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}}$ в ряд Маклорена.

Решение. $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1}}$.

Применим следующие разложения:

$$\mathbf{\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+...,\qquad x\in(-1;1)}$$

$$\mathbf{\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+...+\left(\frac{x}{3}\right)^n+...,\qquad \frac{x}{3}\in(-1;1)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{f(x)=-\frac{1}{12}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+...+\left(\frac{x}{3}\right)^n+...\right]--\frac{1}{4}\left[1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+...\right]=}$$

$$\mathbf{=-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}x-\frac{7}{27}x^2+...+\left[\frac{(-1)^{n+1}}{4}-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]x^n+...}.$$

Полученный ряд представляет функцию $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}}$ при $\mathbf{x\in(-1;1)}$.

Пример 4. Разложить функцию $\mathbf{f(x)=\ln(8+x^3)}$ в ряд Маклорена.

Решение.

Воспользуемся разложением $\mathbf{\ln(1+u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{n+1}}{n+1}}$.

Полагая $\mathbf{u=\dfrac{x^3}{8}}$, имеем:

$$\mathbf{\ln(8+x^3)=\ln 8+\ln\left(1+\frac{x^3}{8}\right)=3\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3(n+1)}}{8^{n+1}(n+1)}},$$

$$\mathbf{\left|\frac{x^3}{8}\right|<1}\quad \text{или}\quad \mathbf{|x|<2}.$$

Пример 5. Получить ряд Маклорена для интегрального синуса

$$\mathbf{si}(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Решение.

Воспользуемся разложением синуса и проинтегрируем ряд почленно:

$$\mathbf{si}(x)=\int_0^x \frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Пример 6. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

а) $\ln\frac{1+x}{1-x}$, б) $\ln\frac{2+x}{1-x}$.

Решение.

а) Поскольку $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ запишем

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

$$\ln(1-x)=\ln(1+(-x))=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1.$$

(сравните с результатами примера 15.3. настоящего пособия).

б) Данную функцию представим в виде

$$\ln\frac{2+x}{1-x}=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln(1+(-x))$$

По известным формулам разложения

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n n}\ \text{ при }\ -1<\frac{x}{2}\le 1,\ \text{ т.е. при }\ -2<x\le 2,$$

$$\ln(1+(-x))=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad \text{при }\ -1<x\le 1,\ \text{т.е. при }\ -1\le x<1,$$

следовательно, $\ln\frac{2+x}{1-x} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + 1\right)\frac{x^n}{n}, x \in [-1;1)$.

Пример 7. Разложить функцию $\frac{3}{2-x-x^2}$ в ряд Маклорена.

Решение. Данную дробь разложим на простейшие

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Пользуясь известным разложением, находим:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{x+1}}, \quad |x| < 2,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x| < 1,$$

следовательно,

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 1\right)x^n, x \in (-1;1).$$

Пример 8. Разложить функцию $\frac{9}{20-x-x^2}$ в ряд Маклорена.

Решение. Данную дробь разложим на простейшие

$$\frac{9}{20-x-x^2} = \frac{9}{(x+5)(4-x)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{4-x}.$$

Воспользуемся известным разложением $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$.

$$\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5\left(1+\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n.$$

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}x^n.$$

Сложив эти два выражения, окончательно получим

$$\frac{9}{20-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^n$$

Пример 9. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ по степеням x.

Решение. Данную дробь разложим на простейшие

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\frac{1}{1-x^3}=$$

$$=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}$$

Равенство $\dfrac{1}{1-x^3}=\sum\limits_{n=o}^{\infty}(x^3)^n$ получается, если $\dfrac{1}{1-x^3}$ истолковать как сумму геометрической прогрессии $\forall|x|<1$.

Пример 10. Разложите в ряд Маклорена функцию **$y=\ln(1-x+x^2)$.** Укажите область сходимости полученного ряда к своей сумме.

Решение. Функция **$y=\ln(1-x+x^2)$** определена на всей числовой прямой, так как **$1-x+x^2>0$** для любых $x\in$R. Преобразуем функцию и воспользуемся разложением $\ln(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}+...$ при $-1<t\le 1$.

Тогда при $x\neq-1$ будем иметь

$$\ln(1-x+x^2)=\ln\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}=\ln(x^3+1)-\ln(1+x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ \text{если } -1<x\le 1\ .$$

Пример 11. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Решение. а) Преобразуем данную функцию

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right].$$

Имеем:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$$

$$\ln(1+(-x))=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-...=(-1)\left[x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n}+...\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(1+1)-\ln(1-x)\right]=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-..+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+..\right]=\text{б)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+..+\frac{2x^{2n-1}}{2n+1}+..\right]=$$

$$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+..+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Очевидно, что полученный ряд сходится при $-1<x<1,$ так как он составлен из двух рядов каждый из которых сходится в промежутке $-1<x<1$.

Таким образом, $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1<x<1).$

Пример 12. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки x_0**=3** функцию

$$f(x)=\frac{2-4x}{x^2-4x-5}.$$

Решение. Представим функцию f в виде суммы простейших дробей

$$f(x)=\frac{-3}{x-5}+\frac{-1}{x+1}.$$

Особыми точками функции f будут точки x_1=5 и x_2=–1. Расстояния точки x_0=3 до особых точек будут соответственно равны 2 и 4. Значит, в интервале (1;5) функция f разлагается в ряд Тейлора по степеням (x–3), причём, в концевых точках интервала сходимости (1;5) указанный ряд будет расходится. (смотри биномиальный ряд

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...\alpha(k-1)}{k!}x^k \quad \text{при } \alpha=-1).$$

Будем иметь:

1) $\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-3-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-3}{-2}}=\left[\left|\frac{x-3}{-2}\right|<1\right]=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(x-3)^k$;

2) $$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+x-3+3}=\frac{1}{4+x-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-3}{-4}}=\left[\left|\frac{x-3}{4}\right|<1\right]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}(x-3)^k;$$

Значит,

$$f=\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(x-3)^k-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}(x-3)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3}{2^{k+1}}-\frac{1}{4^{k+1}}\right)(x-3)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\left(3-\frac{1}{2^{k+1}}\right)(x-3)^k$$ – искомый ряд с областью сходимости (1;5).

Пример 13. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ функцию $y=\sin\frac{\pi x}{4}$.

Решение.

а) Произведем над заданной функцией тождественные преобразования такие, чтобы под знаком функции получить выражение (x-2)

$$\sin\frac{\pi}{4}x=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\frac{\pi}{4}(x-2)$$

Теперь воспользуемся разложением косинуса:

$$\cos\frac{\pi}{4}(x-2)=1-\frac{\pi^2(x-2)^4}{4^4\cdot 4!}-...+(-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!}+...$$

б) Для отыскания интервала сходимости этого ряда воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^{2k+2}(x-2)^{2k+2}4^{2k}(2k)!}{4^{2k+2}(2k+2)!\pi^{2k}(x-2)^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2(2k+1)(2k+2)}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}(x-2)^2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}<1$$

$$(x-2)^2<\frac{4^2}{\pi^2}\lim_{k\to\infty}(2k+1)(2k+2),$$

$(x-2)^2<\infty$, **следовательно,** $-\infty<x-2<+\infty$ **откуда** $-\infty<x<+\infty$.

Таким образом, выписанный нами ряд сходится при всех значениях x.

$$\sin\frac{\pi}{4}x=1-\frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4\cdot 4!}-...+(-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!}+...\quad\forall x\in(-\infty;\infty).$$

Пример 14. Разложите в ряд Тейлора по степеням $x-3$ функцию $y=\dfrac{1}{x}$.

Решение.

а) произведем тождественные преобразования функции $\dfrac{1}{x}$ такие, чтобы при разложении можно было воспользоваться известным разложением.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{(x-3)}{3\cdot 3}+\frac{(x-3)^2}{3\cdot 3^2}-\frac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3\cdot 3^n}+\ldots$$

б) Полученный ряд сходится при

$-1<\dfrac{x-3}{3}<1$ **или** $-3<(x-3)<3$ $0<x<6$.

Итак: $$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3\cdot 3^n} \quad (0<x<6)$$

Задания к § 12-14.

После изучения § 12-14 выполните задания 18-20 из главы 3 настоящего пособия.

§15. Приближенное вычисление значений функций.

Если функция **y=f(x)** разлагается, например, в ряд Маклорена в некотором интервале **(–r,r), r>0**, то задача вычисления значения функции **f** в точке $x_0 \in (-r,r)$ состоит в нахождении суммы указанного ряда Маклорена при $x=x_0$. Если известно разложение функции в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

то для любого числа x_0, взятого из области сходимости этого ряда, справедливо приближенное соотношение

$$f(x_0) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k (x_0)^k .$$

Значение функции вычисляется приближённо, и оно определяется некоторой частичной суммой соответствующего числового ряда. Минимальное число n_0 таких членов устанавливается путем оценки либо остатка указанного числового ряда $R_n(x_0)$, либо остаточного члена формулы Маклорена $r_n(x_0)$, так как в случае сходимости степенного ряда функции **y=f(x)** они равны между собой.

$$|R_n(x_0)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x_0)^k \right| .$$

Оценка величины точности особенно проста, если ряд является знакочередующимся. В этом случае погрешность вычислений не превышает величины первого отброшенного члена, т.е.

$$|R_n(x^*)| = \left| a_{n+1} (x_0)^{n+1} \right| .$$

Если же ряд не является знакочередующимся, то при оценке погрешности могут быть использованы геометрическая прогрессия, оценка остаточного члена ряда Тейлора или какие-либо другие соображения.

Пример 15.1. Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ число e.

Решение. Так как

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0;x), \ \forall x \in R ,$$

то из оценки $R_n(1) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} \le 0{,}01$ получаем $n \ge 5$, т.е. $n_0 = 5$.

Итак,

$$\mathbf{e} \approx \mathbf{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + 0{,}500 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717.}$$ Окончательный ответ $\mathbf{e \approx 2{,}72\ (\varepsilon = 0{,}01)}$.

Пример 15.2. Вычислить $\sin 18^{o}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Так как $18^{o} = \pi/10$, и ряд $\sin\frac{\pi}{10} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}$ является рядом Лейбница, то из оценки

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| = \frac{1}{(2(n+1)+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2(n+1)+1} \le 0{,}0001$$ получаем $n \ge 1$, т.е. $n_0 = 1$.

$$\sin 18^{o} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} \approx 0{,}31416 - 0{,}00517 = 0{,}30899.$$

Окончательный ответ: $\sin 18^{o} \approx 0{,}3090 \quad (\varepsilon = 0{,}0001)$.

Пример 15.3. Вычислить $\sqrt[5]{33}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Так как по биноминальному разложению

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = 2\left(1 + \frac{1}{32}\right)^{1/5} = 2\left[1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{2}{25}\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \frac{6}{125}\left(\frac{1}{32}\right)^3 - \ldots\right] =$$

$$= 2 + \frac{1}{5\cdot 16} - \frac{1}{8\cdot 25\cdot 32} + \frac{3}{8\cdot 125\cdot 32^2} - \ldots\ .$$

Так как уже третий член ряда по абсолютной величине меньше заданной точности, то $n_0 = 2$.

$$\sqrt[5]{33} \approx 2 + \frac{1}{5\cdot 16} = 2 + 0{,}0125 = 2{,}0125.$$

§16. Приближенное вычисление интегралов.

При приближенном вычислении определенного интеграла часто, особенно в случае, когда соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции в конечном виде, бывает удобно представить его в виде суммы ряда. Для этого сначала подынтегральную функцию разлагают в степенной ряд, а затем интегрируют почленно.

Пример 16.1. Вычислить $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Имеем: $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in R \Rightarrow$

$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^{1/3} x^{2n}dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$, и справедлива следующая оценка остаточного члена:

$$|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)+1} \le 0{,}001, \text{ откуда } n \ge 1, \text{ т.е. } n_0 = 1.$$

$$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} \approx 0{,}3333 - 0{,}0123 = 0{,}3210.$$

Окончательный ответ $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx 0{,}321 \ (\varepsilon = 0{,}001).$

§17. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов целесообразно в тех случаях, когда их решения не выражаются в элементарных функциях или не приводятся к квадратурам (т.е. не могут быть представлены в виде интегралов). В таких случаях ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти методом неопределенных коэффициентов, или способом, основанным на прямом использовании формулы Тейлора.

Метод неопределенных коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям, т.е. уравнениям вида

$$y^n + p_1(x)\cdot y^{n-1} + p_2(x)\cdot y^{n-2} + \ldots + p_{n-1}(x)\cdot y' + p_n(x)\cdot y = f(x)$$

и состоит в следующем. Если все коэффициенты ряда $p_k(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $(x - x_0)$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, то искомое решение $y = y(x)$ может быть представлено в виде степенного ряда

$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$ сходящегося в том же интервале. Подставляя в исходное уравнение значение найденной функции и её производных, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})$. Из получаемых при этом уравнений и начальных условий, если они заданы, удаётся найти коэффициенты $\mathbf{c_0},\ \mathbf{c_1},\ \mathbf{c_2},\ldots$

Пример 17.1.Найти решение дифференциального уравнения $\mathbf{yy'=\sin y}$ с начальными условиями $\mathbf{y(0)=\pi/2}$.

Решение.

Данное уравнение допускает разделение переменных $\mathbf{\dfrac{ydy}{\sin y}=dx,}$ однако интеграл от левой части не выражается в элементарных функциях.

Будем искать решение в виде ряда Маклорена $\mathbf{y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n}$.

Так как $\mathbf{y(0)=\pi/2}$, а $\mathbf{y'=\dfrac{\sin y}{y}}$, то $\mathbf{y'(0)=2/\pi}$.

Продифференцируем выражение для первой производной:

$$\mathbf{y''=\frac{(y'\cos y)y-y'\sin y}{y^2}=\frac{y'(y\cos y-\sin y)}{y^2}},$$

откуда $\mathbf{y''(0)=\dfrac{-y'(0)\sin \pi/2}{y^2}=-\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^3}$.

Дифференцируя выражение для второй производной, найдем $\mathbf{y'''(0)}$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения:

$$\mathbf{y=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}x-\frac{2^2}{\pi^3}x^2+\ldots}\ .$$

Пример 17.2. Найти решение дифференциального уравнения $\mathbf{y''-xy=0}$ с начальными условиями $\mathbf{y(0)=0,\ y'(0)=1}$, взяв три отличных от нуля членов разложения в ряд Тейлора.

Решение.

Будем искать решение в виде ряда Маклорена $\mathbf{y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n}$.

Составим таблицу:

$y'' = xy$	$y''(0) = 0$
$y''' = y + xy'$	$y'''(0) = 0$
$y^{(IV)} = y' + y' + xy'' = 2y' + xy''$	$y^{(IV)}(0) = 2$
$y^{(V)} = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy'''$	$y^{(V)}(0) = 0$
$y^{(VI)} = 3y''' + y''' + xy^{(IV)} = 4y''' + xy^{(IV)}$	$y^{(VI)}(0) = 0$
$y^{(VII)} = 4y^{(IV)} + y^{(IV)} + xy^{(V)} = 5y^{(IV)} + xy^{0V}$	$y^{(VII)}(0) = 10$

Таким образом, $y = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{10}{7!}x^7 + \dots$.

Типовые примеры к §15-17.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\cos(100x^2)dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Полагая в разложении $\cos t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}, \qquad t \in (-\infty;+\infty)$

t=100x^2 получаем $\cos(100x^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^{4n} x^{4n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$,

следовательно,

$$\int\limits_0^{0.1}\cos(100x^2)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{0.1}\frac{(-1)^n 10^{4n} x^{4n}}{(2n)!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^{4n} x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}\Bigg|_0^{0.1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10(4n+1)(2n)!}.$$

Последний ряд является знакочередующимся рядом, поэтому, если в качестве его суммы взять сумму первых n-1 членов, то ошибка по абсолютной величине не будет превосходить числа

$a_n = \frac{1}{10(4n+1)(2n)!}$. Так как $a_1 = \frac{1}{100} > 0.001, \quad a_2 = \frac{1}{2160} < 0.001,$ то с точностью до 0,001 имеем

$$\int\limits_0^{0.1}\cos(100x^2)dx \approx \sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{10(4n+1)(2n)!} = 0,1 - 0,01 = 0,09.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не может быть выражен в элементарных функциях, поэтому приближенное вычисление его является единственно возможным.

Подынтегральное выражение разлагается в ряд

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int\limits_{0}^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_{0}^{1/4}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx = \left(x = \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots\right)\Bigg|_{0}^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{1}{4^5} - \frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{4^7} + \ldots.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, находим

$$\int\limits_{0}^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{4^3} \approx 0{,}25 - 0{,}00087 \approx 0{,}24913.$$

Поскольку ряд знакочередующийся, погрешность не превзойдёт величины первого отброшенного члена

$$\frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{1}{4^5} = \frac{1}{5\cdot 120\cdot 1024} = \frac{1}{614400} < 10^{-5}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Подынтегральная функция разлагается в степенной ряд

$$\left(1+x^3\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^6 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^9 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^{12} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - \frac{5}{128}x^{12} + \ldots \qquad (|x| < 1).$$

Интегрируя этот ряд почленно, находим

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx=\left(x+\frac{x^4}{8}-\frac{x^7}{56}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{5x^{13}}{1664}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8\cdot 2^4}-\frac{1}{56\cdot 2^7}+\frac{1}{160\cdot 2^{10}}-\ldots$$

Ограничимся двумя первыми членами, поскольку уже $\frac{1}{56\cdot 2^7}=\frac{1}{56\cdot 128}<10^{-3}$.

В итоге: $$\int_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{128}\approx 0{,}508.$$

Пример 4. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,001.

Решение. Принимая во внимание разложение

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

при $x=\frac{1}{2}$ получим приближённое равенство

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\sim 1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{1}{2^n\cdot n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. Так как $f^{(n+1)}(x)=e^x$, то $R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$,

где ξ лежит между 0 и x.

При $x=\frac{1}{2}$ имеем $R_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}$.

Но $e^{\xi}<e^{\frac{1}{2}}<\sqrt{3}<2$, поэтому $R_n\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{2}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$.

Чтобы ошибка была меньше 0,001, достаточно взять n=4, так как

$$R_4\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{(4+1)!\,2^4}=\frac{1}{1920}<0{,}001.$$

Итак, с точностью до 0,001 имеет место следующее равенство:

Если ещё учесть, что при **n=5** будет $\frac{1}{2^n n!}=0{,}00026$, то $\sqrt{e}\approx 1{,}649\ (0{,}001)$.

Пример 5. Вычислить $\cos 10^{o}$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Используя ряд для $\cos x$ при $x=\pi/18$, найдем

$$\cos\frac{\pi}{18}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n}+\ldots$$

Так как ряд знакочередующийся, погрешность не превосходит первого отбрасываемого числа. По заданной точности находим n из условия

$$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n}<10^{-4}$$

Это неравенство выполнено уже при $\mathbf{n=2}$. Произведя вычисления, получим

$$\cos\frac{\pi}{18}=1-\frac{\pi^2}{648}=0{,}9848.$$

Пример 6. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 10^{-4}.

Решение.

Преобразуем это выражение: $\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}}=5(1+\frac{1}{25})^{1/3}$

Воспользуемся стандартным разложением :

$$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4 4!}x^4+\ldots$$

Подставляя вместо **x** число $\frac{1}{25}$, получим числовой ряд:

$$(1+\frac{1}{25})^{1/3}=1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{1\cdot 2}{3^2 2!\cdot 5^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4 4! 5^8}+\ldots$$

Имеем знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница. Если взять в качестве приближенного значения суммы этого ряда сумму **n** первых его членов, то будем иметь абсолютную погрешность, меньшую, чем первый отброшенный член. Так как мы должны вычислить значение корня с точностью до 0,0001, то для подсчета нужно взять первые три члена ряда.

Действительно, уже четвертый член, умноженный на 5, будет равен

$$\frac{5\cdot 1\cdot 2\cdot 5}{3^3 3! 5^6}=\frac{1\cdot 2}{27\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^4}=\frac{1}{81\cdot 625}<0{,}0001\ .$$

Производим вычисления (умножаем каждый член ряда на 5): 5,00000+0,06667-0,00089=5,06578. Таким образом,

$$\sqrt[3]{130} \approx \mathbf{5{,}00000+0{,}06667-0{,}00089} \approx \mathbf{5{,}06578} \quad \text{(с точностью до 0,0001).}$$

Замечание. Т.к. использованное разложение справедливо для $-1 < x < 1$, то число 130 должно быть разбито на два слагаемых так, чтобы из первого числа извлекался корень кубический, а второе слагаемое было меньше 1.

Пример 7. Вычислить с точностью до 10^{-4} выражение $1/\sqrt[4]{20}$.

Решение. Представим $1/\sqrt[4]{20}$ в виде

$$\frac{1}{\sqrt[4]{20}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16+4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1+1/4}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

и воспользуемся биномиальным разложением

$$\frac{1}{\sqrt[4]{20}} = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\ldots\left(-\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right] = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1\cdot5\cdot9\ldots(4k-3)}{4^{2k}\cdot k!}\right]$$

Учитывая, что $\dfrac{1\cdot5\cdot9\ldots(4k-3)}{2\cdot4^{2k}\cdot k!} < 10^{-4}$ при $k \ge 5$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt[4]{20}} \approx \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{16}+\frac{5}{512}-\frac{45}{6\cdot4^{6}}+\frac{5\cdot9\cdot13}{24\cdot4^{8}}\right] \approx 0{,}5381.$$

Следует отметить, что в практике вычислений большую роль играет быстрота приближения частичной суммы ряда к искомому результату. Например, из ряда $\ln(1+x)$ при $x = 1$ получаем

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

откуда видно, что для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-3} следует взять тысячу членов ряда! Это, конечно, неосуществимо. Обычно для вычисления логарифмов используется разложение функции $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Пример 8. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

Решение.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x}{n} = 2\sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Поскольку при $x = \frac{1}{3}$ $\frac{1+x}{1-x} = 2$, разложение $\ln 2$ имеет вид

$\ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$. Этот ряд сходится быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/3$.

Остаток ряда оценим следующим образом:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}} < \frac{1}{3(2n+3)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \frac{1}{3(2n+3)9^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{24(2n+3)9^n}.$$

Очевидно, что уже при $n = 2$ погрешность вычислений не более 10^{-4}.

Произведем вычисления:

$$\ln 2 \neq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5}\right) = 0{,}6931.$$

Пример 9. С помощью рядов решить задачу Коши для уравнения

$$y' - y = 0 \quad \text{при условии} \quad y\big|_{x=o} = 1.$$

Решение. В данном случае $x_0 = 0$ (т.к. интегральная кривая проходит через точку $(0,1)$). Решение ищем в виде ряда

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \ldots + c_nx^n + \ldots.$$

Производная его:

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots$$

Подставив y и y' в уравнение, получаем

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + (n+1)c_{n+1}x^n$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & c_0 = c_1 \\
x^1 & c_1 = 2c_2 \\
x^2 & c_2 = 3c_3 \\
x^3 & c_3 = 4c_4 \\
\ldots & \ldots \\
x^n & c_n = (n+1)c_{n+1} \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Из начального условия $y|_{x=o} = 1$ очевидно, что $c_o = 1$. Остальные коэффициенты находим, решая систему уравнений

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{2\cdot 3},\ c_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots,\ c_n = \frac{1}{2\cdot 3\ldots n}.$$

Искомое решение:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Точное решение данного уравнения легко получить:

$\frac{dy}{dx} - y = 0$, $\int \frac{dy}{y} = \int dx$, $\ln|y| = x + \ln C$, $y = C\cdot e^x$, где $C = 1$ из условия $y|_{x=o} = 1$.

Очевидно, что полученные решения совпадают.

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y' = -y$ в виде степенного ряда.

Решение. Решение ищем в виде ряда

$$y = c_o + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

Производные ряда имеют вид

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + 4\cdot 5x^3 + \ldots(n-1)n\cdot x^{n-2} + \ldots$$

В результате подстановки y и y'' в уравнение получаем

$$2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + 4\cdot 5c_5x^3 + \ldots + (n-1)nc_nx^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \ldots =$$

$$= -c_o - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3 - \ldots - c_{n-2}x^{n-2} - c_{n-1}x^{n-1} - \ldots$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l}
x^0 & 2c_2 = -c_o \\
x^1 & 2\cdot 3c_3 = -c_1 \\
x^2 & 3\cdot 4c_4 = -c_2 \\
x^3 & 4\cdot 5c_5 = -c_3 \\
 & \ldots\ldots\ldots \\
x^{n-2} & (n-1)nc_n = c_{n-2}
\end{array}$$

$$x^{n-1}\Big|\quad n(n+1)c_{n+1}=c_{n-1}$$

. . . .

Решая систему, находим

$$c_2=-\frac{c_0}{2},\quad c_4=-\frac{c_2}{3\cdot 4}=\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{c_0}{4!},\ \dots\ c_{2n}=(-1)^n\frac{c_0}{(2n)!}$$

$$c_3=-\frac{c_1}{2\cdot 3}=-\frac{c_1}{3!},\quad c_5=-\frac{c_3}{4\cdot 5}=\frac{c_1}{5!},\ \dots\quad c_{2n+1}=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Общее решение задачи имеет вид:

$$y=c_0\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]+c_1\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]$$

Непосредственное интегрирование в данной задаче возможно и приводит к общему решению такого вида:

$$y=c_0\cos x+c_1\sin x$$

Убедиться в совпадении результатов интегрирования можно сравнив содержимое квадратных скобок со степенными рядами для $\cos x$ и $\sin x$.

Пример 11. Найти решение задачи Коши для уравнения $y''-2y'+y=e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=0$, $y'\big|_{x=0}=1$.

Решение. Решение ищем в виде ряда по степеням x

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

Производные его имеют вид:

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots$$

$$y''=2c_2+2\cdot 3c_3x+3\cdot 4c_4x^2+4\cdot 5c_5x^3+\ldots+(n-1)nc_nx^{n-2}+\ldots$$

Из начальных условий находим значения c_0 и c_1:

$$y\big|_{x=0}=c_0=0,\quad y'\big|_{x=0}=c_1=1.$$

Подставив в дифференциальное уравнение y, y', y'' и разложение в ряд e^x, получим:

$$2c_2+2\cdot 3c_3x+3\cdot 4c_4x^2+4\cdot 5c_5x^3+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\ldots-$$
$$-2\left(1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots\right)+x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+$$
$$+c_5x^5+\ldots+nc_nx^n+\ldots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mathbf{x}$ в обеих частях этого равенства, получаем систему уравнений для определения $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{c_3}$, $\ldots$:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{x^0} & 2c_2 - 2 = 1 \\ \mathbf{x^1} & 2\cdot 3c_3 - 4c_2 + 1 = 1 \\ \mathbf{x^2} & 3\cdot 4c_4 - 2\cdot 3c_3 + c_2 = \dfrac{1}{2!} \\ \mathbf{x^3} & 4\cdot 5c_5 - 2\cdot 4c_4 + c_3 = \dfrac{1}{3!} \\ \mathbf{x^4} & 5\cdot 6c_6 - 2\cdot 5c_5 + c_4 = \dfrac{1}{4!} \end{array}$$

Решая эту систему, находим:

$$c_2 = \frac{3}{2}, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = \frac{5}{12}, \quad c_5 = \frac{1}{8}, \ \ldots$$

и частное решение уравнения

$$y = x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \ldots$$

Решая это уравнение как линейное неоднородное с постоянными коэффициентами при тех же начальных условиях, найдём

$$y = xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Подставив в последнее выражение разложение функции $\mathbf{e^x}$ в степенной ряд, получим:

$$y = x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot x^2 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{2}\right)\cdot x^3 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2\cdot 2!}\right)\cdot x^4 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2\cdot 3!}\right)\cdot x^5 + \ldots$$

$$+\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{2(n-2)!}\right)\cdot x^n + \ldots$$

т.е. получаем тот же результат.

Пример 12. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{при начальном условии} \quad y\big|_{x=o} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Будем искать в виде ряда Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Выражения для производных y'', y''', $\ldots$ найдем, дифференцируя исходное уравнение

$$y''=2x+2y\cdot y',\quad y'''=2+2(y')^2+2y\cdot y'',\quad y^{(IV)}=6y'y''+2y\cdot y'''.$$

Вычислим значения $y(x)$ и производных, входящих в формулу Маклорена, при $x=0$.

$$y(0)=\frac{1}{2}\text{ (из начального условия),}$$

$$y'(0)=0+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\text{ (из уравнения),}$$

и далее, последовательно:

$$y''(0)=2\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$y'''(0)=2+2\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{19}{8},$$

$$y^{(IV)}(0)=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{8}=\frac{11}{4}.$$

Подставив эти значения в формулу Маклорена, получим:

$$y(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{8}\cdot x^2+\frac{19}{48}\cdot x^3+\frac{11}{96}\cdot x^4+\ldots$$

Задания к §15-17.

После изучения §16-18 выполните задания 21-24 из главы 3 настоящего пособия.