

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ –  
УПИ  
НИЖНЕТАГИЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**Демина Е.Л., Демин С.Е.**

**РЯДЫ**

г. Нижний Тагил

2003.

## Предисловие.

В настоящем пособии излагаются основы теории числовых и функциональных рядов и их использования для приближенных вычислений.

Теоретический материал, приведенный в пособии, написан на основе курса лекций и практических занятий, которые авторы на протяжении ряда лет проводили в Нижнетагильском технологическом институте УГТУ-УПИ. Пособие дает полное представление об объеме изучаемого материала и может быть использован как для самостоятельного изучения материала, так и для подготовки к сдаче экзаменов.

Первая глава посвящена числовым рядам. В ней рассмотрены традиционные вопросы (признаки сходимости положительных рядов, знакочередующиеся ряды и т.д.) с разбором конкретных задач как по обсуждению "технических приемов", так и по показу более "тонких мест" применимости той или иной теоремы или формулы.

Во второй главе ("Функциональные ряды") приводится краткая теория, иллюстрированная многочисленными разобранными задачами, позволяющими полнее и осознаннее изучить представленный материал. Значительное место отводится приложениям степенных рядов в приближенных вычислениях значений функций и определенных интегралов, а также при приближенном интегрировании разнообразных дифференциальных уравнений.

В целях лучшего усвоения курса математики и интенсификации самостоятельных занятий студентов в третьей главе пособия приведены контрольные задания для самостоятельной работы студентов. Каждое контрольное задание проверяет усвоение материала по конкретному разделу курса. Предлагаемые задания по объему заметно превосходят существующие пособия и позволяют полнее индивидуализировать самостоятельную работу студентов.

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения всех специальностей.

# Глава 1. Числовые ряды

## §1. Сходимость ряда и его сумма. Простейшие теоремы

**Определение 1.1.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  - заданная числовая последовательность.

$$\text{Выражение } a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется **числовым рядом**, а величина  $a_i - i$  - членом ряда.

**Определение 1.2.** Конечные суммы  $S_1 = a_1,$   
 $S_2 = a_1 + a_2,$   
.....  
 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$   
.....

называются **частичными суммами** ряда (1).

**Определение 1.3.** Если существует конечный предел последовательности частичных сумм  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  (здесь и дальше под  $n \rightarrow \infty$  будем понимать  $n \rightarrow +\infty$ ), то ряд называется **сходящимся**, а число  $S$  - **суммой** ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Если не существует конечного предела последовательности частичных сумм  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , то ряд называется **расходящимся**.

Поскольку сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ , то, применяя к последовательности  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  критерий Коши сходимости последовательности, сразу получаем.

**Теорема 1.1.** (*критерий Коши сходимости ряда*). Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что для любых  $n > n_0$  и любого  $p \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Следствие 1.** (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то его члены стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Доказательство.** Достаточно в критерии Коши положить  $p=1$  и воспользоваться определением предела последовательности. А именно, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то по критерию Коши для  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall n > n_0$  и  $p$  выполняется неравенство  $|a_{n+1}| < \varepsilon$ . А это и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$ . Тогда при этом условии  $a_n \rightarrow 0$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Вот другое доказательство:  $a_n = S_n - S_{n-1}$  и, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$ .

**Следствие 2.** Если у ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  общий член  $a_n$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд расходится.

**Следствие 3.** Сходимость или расходимость ряда не изменяется после отбрасывания (добавления) любого конечного числа членов ряда (к ряду).

**Доказательство.** Для доказательства достаточно в критерии Коши считать число  $n_0$  превышающим максимальный из номеров измененных членов ряда. В этом случае в разности

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

при таком  $n_0$  дописанные члены взаимно уничтожаются, а вычеркнутые, естественно, не могут увеличить этой разности. Поэтому в том и другом случае неравенство условия Коши остается справедливым.

**Следствие 4.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и любой его остаток  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  одновременно сходятся или расходятся.

**Доказательство.** Остаток  $r_n$  ряда получается из ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  путём отбрасывания его первых  $n$  членов, а от этого (см. следствие 3) сходимость или расходимость ряда не изменится.

**Пример 1.1.** Исследовать на сходимость *геометрический ряд*  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $q \neq 0$ .

**Решение.** Последовательность членов ряда есть геометрическая прогрессия. Составим  $n$ -ю частичную сумму ряда

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Если  $q=1$ , то  $S_n=na$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  – ряд расходится.

Если  $q = -1$ , то ряд имеет вид  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$ . Последовательность частичных сумм данного ряда такова:

$$S_1 = a, S_2 = 0, S_3 = a, S_4 = 0, \dots \text{ т.е. } S_{2k-1} = a, S_{2k} = 0, k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку две подпоследовательности  $\{S_{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$  имеют различные пределы  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = a$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$ , то предел последовательности  $S_n$  частичных сумм рассматриваемого ряда при  $n \rightarrow \infty$  не существует, и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  расходится.

Далее возможны следующие случаи:

а)  $|q| < 1$ .

Последовательность членов ряда есть так называемая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ , если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ .

б)  $|q| > 1$ .

Поскольку  $|q^n| = |q|^n$ , то при  $|q| > 1$  будет  $|q^n| > 1$ , тогда  $|a_n| = |a||q^n| > |a|$ , т.е.  $|a_n| > |a|$ , и в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Таким образом, геометрический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ ,  $a \neq 0$ , сходится тогда и только

тогда, когда  $|q| < 1$ , и в этом случае его сумма равна  $\frac{a}{1-q}$ .

**Пример 1.2.** Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

(каждый член этого ряда, начиная со второго, есть среднее гармоническое последующего и предыдущего членов:  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$ ).

**Решение.** Члены ряда стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , но последовательность его частичных сумм

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

расходится, поскольку для любого  $n \in \mathbb{N}$

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

и в силу критерия Коши эта последовательность не имеет предела.

Итак, гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

**Замечание 1.** Из данного примера следует, что необходимое условие сходимости ряда не является достаточным.

**Пример 1.3.** Исследовать на сходимость ряд Дирихле (или обобщенный гармонический ряд)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

**Решение.** Для этого ряда необходимый признак не выполняется при  $p \leq 0$ , и ряд расходится при таких значениях.

При  $p > 0$  необходимый признак выполнен, но о сходимости ряда нельзя сделать никаких выводов – он может сходиться, а может и расходиться. Окончательный ответ можно получить после изучения достаточных принципов сходимости рядов.

**Пример 1.4.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

**Решение.** Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

Запишем  $k$ -ю,  $k \in \mathbb{N}$ , частичную сумму ряда и преобразуем её

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right).$$

Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$ .

**Ответ:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

Следующие простейшие теоремы характеризуют свойства сходящихся рядов.

**Теорема 1.2.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и имеет сумму  $S$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ , называемый произведением данного ряда на число  $\lambda$ , также сходится и имеет сумму  $\lambda S$ .

**Доказательство.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lambda S$ .

**Теорема 1.3.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся и имеют соответственно суммы  $S$  и  $\sigma$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ , называемый суммой данных рядов, также сходится и имеет сумму  $S + \sigma$ , т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

**Доказательство.** Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n b_k$  и  $\omega_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ , тогда  $\omega_n = S_n + \sigma_n$ , и так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$  по условию существуют, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$  также существует и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ . Это равенство эквивалентно доказываемому равенству.

**Теорема 1.4.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то его остаток стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть дан ряд  $\sum_{k=1}^n a_k$ , а  $S$  – его сумма,  $r_n$  –  $n$ -й остаток ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Тогда  $S = S_n + r_n$ . Поскольку  $S_n \rightarrow S$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $r_n = S - S_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## Контрольные вопросы к §1.

1. Дайте определение сходящейся последовательности.
2. Сформулируйте на языке " $\varepsilon$ - $n_0$ " определение сходящейся и расходящейся последовательности.
3. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности (ряда).
4. Сформулируйте необходимый признак сходимости рядов.

5. Сформулируйте достаточный признак расходимости рядов, исходя из необходимого условия сходимости рядов.
6. Сформулируйте свойство линейности сходящихся рядов.

### Типовые примеры к §1.

**Пример 1.** Найти  $u_{n+1}$  и  $u_{2n-1}$  члены ряда  $\frac{21}{2 \cdot 2!} + \frac{41}{4 \cdot 3!} + \frac{61}{8 \cdot 4!} + \dots$

**Решение:** Числители последовательных дробей образуют арифметическую прогрессию 21, 41, 61, ... в которой  $d = 20$ ,  $a_1 = 21$ .

Поэтому  $a_n = a_1 + d(n-1) = 21 + 20n - 20 = 20n + 1$ .

Основания факториала каждого члена совпадает с увеличенным на единицу номером этого члена, а знаменатели последовательных дробей образуют геометрическую прогрессию 2, 4, 8, .... в которой  $q = 2$ ,  $b_1 = 2$ .

Поэтому  $b_n = 2^n$ .

Запишем формулу общего члена данного ряда:  $u_n = \frac{20n + 1}{2^n (n + 1)!}$ .

$$\text{Тогда } u_{n+1} = \frac{20(n+1) + 1}{2^{n+1} (n+1+1)!} = \frac{20n + 21}{2^{n+1} (n+2)!};$$

$$u_{2n-1} = \frac{20(2n-1) + 1}{2^{2n-1} (2n-1+1)!} = \frac{40n - 19}{2^{2n-1} (2n)!}.$$

**Пример 2.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

**Решение.** Запишем данный ряд в явной форме:  $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$

Очевидно, что члены этого ряда представляют собой последовательные члены геометрической прогрессии, у которой  $q = 2/3$ ,  $b_1 = 2/3$ .

Сумма геометрической прогрессии  $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{3} * \frac{3}{1} = 2$ .

Ответ:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 2$

**Пример 3.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ .

**Решение.** Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1},$$

откуда

$$A(4n+1) + B(4n-3) = 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $n$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ A - 3B = 1 \end{cases}$$

из которой находим:  $A=1/4$  и  $B=-1/4$ , следовательно,

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right).$$

Запишем  $k$ -ю,  $k \in \mathbb{N}$ , частичную сумму ряда и преобразуем её

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4k+1} \right).$$

Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4k+1} \right) = \frac{1}{4}$ .

**Ответ:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}$ .

**Пример 4.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}$ .

**Решение.** Разложим знаменатель на простейшие множители:

$$49n^2 - 70n - 24 = 0$$

Корнями этого уравнения являются числа  $n_1 = -2/7$  и  $n_2 = 12/7$ , поэтому

$$49n^2 - 70n - 24 = 49 \left( n + \frac{2}{7} \right) \left( n - \frac{12}{7} \right) = (7n+2)(7n-12)$$

Теперь методом неопределённых коэффициентов выражение

$\frac{14}{49n^2 - 70n - 24}$  разложим на простейшие дроби:

$$\frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{A}{7n + 2} + \frac{B}{7n - 12},$$

откуда

$$A(7n - 12) + B(7n + 2) = 14$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $n$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 7A + 7B = 0 \\ -12A + 2B = 14 \end{cases}$$

из которой находим :  $A=-1$  и  $B=1$ , следовательно,

$$\frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{1}{7n - 12} - \frac{1}{7n + 2}.$$

Запишем  $n$ -ю,  $n \in \mathbb{N}$ , частичную сумму ряда и преобразуем её

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{14}{49k^2 - 70k - 24} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{7k - 12} - \frac{1}{7k + 2} \right) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{23} + \\ &+ \frac{1}{16} - \frac{1}{30} + \frac{1}{23} - \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{7(n-2) - 12} - \frac{1}{7(n-2) + 2} + \frac{1}{7(n-1) - 12} - \frac{1}{7(n-1) + 2} + \\ &+ \frac{1}{7n - 12} - \frac{1}{7n + 2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7(n-1) + 2} - \frac{1}{7n + 2} = \frac{3}{10} - \frac{1}{7n - 5} - \frac{1}{7n + 2} \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{10} - \frac{1}{7n - 5} - \frac{1}{7n + 2} \right) = 0,3$$

Ответ:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = 0,3.$

**Пример 5.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 8}{n(n + 1)(n + 2)}$ .

**Решение.** Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей

$$\frac{3n + 8}{n(n + 1)(n + 2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n + 1} + \frac{C}{n + 2},$$

откуда

$$A(n + 1)(n + 2) + Bn(n + 2) + Cn(n + 1) = 3n + 8$$

Найдем коэффициенты разложения комбинированным методом:

$$\begin{array}{l} n^3 \\ n=0 \\ n=-1 \end{array} \left| \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 2A=8 \\ -B=5 \end{array} \right.$$

из которой находим :  $A=4$  ,  $B=-5$  ,  $C=1$  , следовательно,

$$\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{n} - \frac{5}{n+1} + \frac{1}{n+2} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Тогда частичную сумму ряда можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3k+8}{k(k+1)(k+2)} = 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \\ &- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \\ &= 3,5 - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3,5 - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = 3,5$$

Ответ:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)} = 3,5$  .

**Пример 5.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  .

**Решение.** Общий член ряда

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

Тогда частичную сумму ряда можно записать в виде

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$$

Следовательно, исследуемый ряд расходится.

**Пример 6.** Можно ли с помощью необходимого признака решить вопрос о сходимости следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n+1}, \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{3n+1} \right)^n$$

**Решение.**

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0, \quad \text{данный ряд расходится.}$$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n+2} = 0$ , т.е. о сходимости данного ряда еще ничего сказать нельзя.

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{3 + \frac{1}{n}} = \infty, \quad \text{данный ряд расходится.}$$

$$\text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\left( \frac{3n}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+1} = 1 \quad \text{не дает ответа о сходимости ряда.}$$

**Пример 7.** Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$  расходится.

**Решение.** Найдем предел общего члена ряда при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e}{n}}{e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2}}} = \frac{e^0}{e^0} = 1 \neq 0.$$

**Ответ:** ряд расходится.

### Задания к §1.

После изучения §1 выполните задания 01-03 из главы 3 настоящего пособия.

## §2. Критерий сходимости знакоположительных рядов. Признаки сравнения.

В этом и следующем параграфе будут рассматриваться ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , все члены которых неотрицательны  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$ . Такие ряды называются *знакоположительными*.

Очевидно, что в силу соотношения  $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , все выводы, полученные для знакоположительных рядов, можно перенести на знакоотрицательные.

**Теорема 2.1.** (критерий сходимости рядов) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ , сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

**Доказательство.** Достаточность вытекает из того, что последовательность частичных сумм знакоположительного ряда не убывает, т.к.  $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$  и, стало быть, для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была ограничена сверху.

Необходимость следует из того, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Из этой теоремы следует простая, но на практике очень полезная теорема.

**Теорема 2.2.** (теорема сравнения) Пусть даны два ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$  и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \geq 0$ . Если существуют  $C > 0$  и  $n_0 \in \mathbf{N}$  такие, что при любом натуральном  $n > n_0$

имеет место неравенство  $a_n \leq Cb_n$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  вытекает сходи-

мость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  вытекает расходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Доказательство.** Поскольку конечное число членов не влияет на сходимость ряда, то можно, без ограничения общности, считать, что  $a_n \leq Cb_n$  для любого  $n \in \mathbf{N}$ .

Обозначим  $n$ -е частичные суммы рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  соответственно через  $A_n$  и

$B_n$ . Тогда  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq C \sum_{k=1}^n b_k = CB_n$ . Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то последовательность  $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ , не убывая, стремится к пределу  $B$ . Тогда  $A_n \leq CB_n \leq CB$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ , а, следовательно, последовательность  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ограничена сверху. В силу теоремы Вейерштрасса ряд сходится.

Второе утверждение теоремы, рассуждая от противного, получаем из уже доказанного.

**Пример 2.1.** Исследовать на сходимость ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

**Решение.** Поскольку  $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$  при  $n \geq 2$ , то по теореме сравнения можно заключить, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  будут сходиться, если сходится ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ . Но ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$  можно просуммировать непосредственно (аналогично примеру 1.4. пособия). При этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ . Значит, указанные ряды сходятся.

**Пример 2.2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

**Решение.** Поскольку  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$  при  $n \geq 2$ , то по теореме сравнения из расходимости гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (см. пример 1.2. пособия) следует расходимость данного ряда.

**Замечание.** Следует обратить внимание на то, что теорема сравнения относится только к рядам с неотрицательными членами. Действительно, положим, например,  $a_n = -n$ , а  $b_n = 0$ , тогда  $a_n < b_n$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

**Следствие 1.** (теорема сравнения в предельной форме):

Если для знакоположительных рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \geq 0$ . и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $b_n \geq 0$  существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C, \quad 0 < C < \infty$$

то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  одновременно сходятся или расходятся. Если  $C=0$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  вытекает сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ следует расходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Доказательство.** Равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$  означает, что для  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , что

$\forall n > n_0$  будет  $\left| \frac{a_n}{b_n} - C \right| < \varepsilon$ , т.е.  $C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$  (\*). Если  $C > 0$ , то взяв  $0 < \varepsilon < C$  и обозначив

в неравенстве (\*)  $C - \varepsilon = m$ ,  $C + \varepsilon = M$  ( $m > 0$ ,  $M > 0$ ), получим  $mb_n < a_n < Mb_n$  для  $\forall n > n_0$  (\*\*).

Тогда по теореме сравнения из неравенств (\*\*) и следует, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  одновременно сходятся или расходятся.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$ , т.е.  $a_n < \varepsilon b_n$ . Тогда по теореме

сравнения из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расхо-

димости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  вытекает, что и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится.

**Следствие 2.** Если знакоположительные последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  являются эквивалентными бесконечно малыми, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся и расходятся одновременно.

**Пример 2.3.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + n\sqrt{n+1}}{\sqrt{9n^6 + 5n^5 + 2}}$ .

**Решение.** Поскольку имеют место следующие эквивалентности бесконечно больших последовательностей:

$$7n^2 + n\sqrt{n+1} + 1 \sim 7n^2, \quad \sqrt{9n^5 + 5n^5 + 2} \sim \sqrt{9n^6} = 3n^3,$$

то 
$$a_n = \frac{7n^2 + n\sqrt{n+1}}{\sqrt{9n^6 + 5n^5 + 2}} \sim \frac{7n^2}{3n^3} = \frac{7}{3n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В соответствии с предельным признаком сравнения исследуемый ряд расходится, т.к. расходится гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

**Теорема 2.3.** (специальный признак – критерий Коши)

Если  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходит

ряд 
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} + \dots$$

**Доказательство.** Обозначим  $n$ -е частичные суммы рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  соответственно через  $S_n$  и  $\sigma_n$ . Тогда  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $\sigma_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}$ . Поскольку

$$\begin{aligned} a_2 &\leq a_2 \leq a_1 \\ 2a_4 &\leq a_3 + a_4 \leq 2a_2 \\ 4a_8 &\leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4 \\ &\dots \\ 2^n a_{2^{n+1}} &\leq a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+2^n}} \leq 2^n a_{2^n}, \end{aligned}$$

то, складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{1}{2}(\sigma_n - a_1) \leq S_{2^{n+1}} - a_1 \leq \sigma_n.$$

Последовательности  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  и  $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$  неубывающие, поэтому из полученных неравенств можно заключить, что они либо одновременно ограничены, либо одновременно не ограничены сверху. Тогда по критерию сходимости рядов с неотрицательными членами следует, что рассматриваемые два ряда действительно сходятся или расходятся одновременно. ▶

**Пример 2.4.** Исследуем на сходимость обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

**Решение.** Если  $\alpha \leq 0$ , то  $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \geq 1$ , и ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю с возрастанием  $n$ . Если  $\alpha > 0$ , то, применяя выше доказанную теорему, получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}},$$

члены которого являются геометрической прогрессией со знаменателем  $q = (1/2)^{\alpha-1}$ .

Поэтому если  $\alpha > 1$ , то  $0 < q < 1$ , и обобщенный гармонический ряд сходится, а если  $\alpha \leq 1$ , то  $q \geq 1$ , и ряд расходится. Таким образом, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**Пример 2.5.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum \frac{1}{n \ln^p n}$

**Решение.** Исследуемый ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^p} = \frac{1}{\ln^p 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ . А этот ряд Дирихле сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

### §3. Признаки Даламбера и Коши.

Признаки Даламбера и Коши вытекают из сравнения рассматриваемых рядов с рядами, составленными из членов геометрической прогрессии.

**Теорема 3.1. (признак Даламбера).** Пусть для ряда с положительными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$ . существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \geq 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $q < 1$ , то данный ряд сходится;
- 2) если  $q > 1$ , или  $q = \infty$ , данный ряд расходится.
- 3) существует как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых  $q = 1$ .

**Доказательство.**

1) Пусть  $0 < q < 1$  и пусть существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$   $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , т. е.

$a_{n+1} \leq qa_n$ . Тогда

$$a_{n_0+1} \leq a_{n_0} q,$$

$$a_{n_0+2} \leq a_{n_0+1} q \leq a_{n_0} q^2,$$

...

$$a_{n_0+p} \leq a_{n_0+p-1} q \leq \dots \leq a_{n_0} q^p,$$

...

А так как ряд  $a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 + \dots + a_{n_0} q^p + \dots$  сходится, являясь суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q$  ( $0 < q < 1$ ), то по признаку сравнения рядов сходится и ряд  $a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_{n_0+p} + \dots$ , а значит,

и исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

2) Если же существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , то  $a_{n_0+1} \geq a_{n_0}, a_{n_0+2} \geq a_{n_0+1} \geq a_{n_0} \dots$  и так как, по предположению,  $a_{n_0} > 0$ , то  $n$ -ый член ряда, будучи ограничен снизу положительной постоянной, не стремится к нулю. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

3) Если  $q = 1$ , то о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  нельзя сказать ничего определенно-

го. Так, гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, а обобщенный гармонический ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится.

**Пример 3.1.** Исследовать ряд на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

**Решение.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1. \text{ Исследуемый ряд сходится}$$

по признаку Даламбера.

**Пример 3.2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ .

**Решение.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} 3^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1, \text{ ряд рас-}$$

ходится по признаку Даламбера.

**Замечание 1.** Признак Даламбера эффективно применим для исследования на сходимость рядов с общим членом, представленным в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются произведением членов некоторых последовательностей.

**Теорема 3.2. (признак Коши).** Пусть для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

$a_n \geq 0$  существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) если  $q < 1$ , то данный ряд сходится;
- б) если  $q > 1$ , то данный ряд расходится;
- в) существует как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых  $q = 1$ .

**Доказательство.** Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , такое, что для  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$n > n_0(\varepsilon)$ , будет выполняться соотношение:

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \quad (*)$$

а) Если  $q < 1$ , то найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что число  $L = q + \varepsilon < 1$ . Тогда из неравенства (\*) имеем  $a_n < L^n \quad \forall n \geq n_0$ , и, согласно признаку сравнения, из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} L^n$  при  $0 < L < 1$  следует сходимость исходного ряда.

б) Если  $q > 1$ , то найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что число  $L = q - \varepsilon > 1$ . Тогда из неравенства (\*) имеем  $a_n > L^n \quad \forall n \geq n_0$ , и, согласно признаку сравнения, из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} L^n$  при  $L > 1$  следует расходимость исходного ряда.

с) Нам уже известно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, Вместе

$$\text{с тем } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

**Пример 3.3.** Исследуем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n}$  на сходимость.

**Решение.** Применим признак Коши. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1, \text{ следовательно, ряд сходится.}$$

**Пример 3.4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ .

**Решение.** По радикальному признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{5} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{5} < 1, \text{ ряд сходится.}$$

**Замечание 2.** Радикальный признак Коши удобно использовать при исследовании сходимости рядов, общие члены которых в качестве сомножителей содержат  $n$  – степени выражения, зависящих от  $n$ .

**Замечание 3.** Для эффективного применения теорем сравнения при исследовании рядов на сходимость важно иметь набор рядов – эталонов (рядов, с которыми проводится сравнение рядов задачи и о которых известно: сходятся или расходятся они при тех или других, входящих в них, значениях параметров). Таковыми, например, будут следующие ряды:

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  – сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ ;
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  – сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ ;
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{e^{\alpha n}}$  – сходится при  $\alpha > 0$  и  $k \in \mathbb{R}$ , расходится при  $\alpha < 0$  и  $k \in \mathbb{R}$ .

При анализе сходимости рядов часто бывает полезна также следующая асимптотическая формула Стирлинга

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, из формулы Стирлинга следует, что  $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Пример 3.5.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$ .

**Решение.** Используем эквивалентность  $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , вычисляем по радикальному признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{e}}{\frac{1}{n^{\sqrt{n}}}} = +\infty,$$

$$\text{т.к.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{1/\sqrt{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}} = e^0 = 1.$$

Исходный ряд расходится.

**Замечание 4.** Можно доказать, что если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , то существует и предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  (и они равны между собой). Обратное утверждение не всегда имеет место. Другими словами, признак Коши «сильнее» признака Даламбера.

## §4. Интегральный признак сходимости рядов

**Теорема 4.1.** (интегральный признак Коши). Если непрерывная функция  $f(x)$ , определенная при всех  $x \geq 1$ , неотрицательная и невозрастающая, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

**Доказательство.** Как известно, несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  называется

сходящимся, если существует предел  $\int_1^b f(x)dx$  при  $b \rightarrow +\infty$ , и расходящимся, если

предел интеграла при  $b \rightarrow +\infty$   $\int_1^b f(x)dx$  не существует или равен  $+\infty$  ( $-\infty, \infty$ ). Сравним

интеграл  $\int_1^b f(x)dx$  при  $b=n$  с частичной суммой  $S_n$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ .

Заметим, что по теореме о среднем  $\int_1^2 f(x)dx = f(c_1)(2-1) = f(c_1)$ , где  $c_1$  – число, заключенное между 1 и 2. Так как функция  $f(x)$  по условию невозрастающая, то  $f(2) \leq f(c_1) \leq f(1)$ , т.е.  $f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f(1)$ .

Также доказывается, что  $f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2)$ ,  $f(4) \leq \int_3^4 f(x)dx \leq f(3), \dots,$

$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1)$ . Складывая почленно все эти неравенства, получим

$$f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n) \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots$$

$$\dots + \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$$

или  $S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$ . (\*)

Рассмотрим теперь два случая:

1) Пусть интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходится.

Так как  $f(x)$  – неотрицательная функция, то с возрастанием  $n$   $\int_1^n f(x)dx$  также не убывает и, значит, не превосходит своего предела – несобственного интеграла

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ . Принимая во внимание неравенство (\*), получим

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ т.е. } S_n \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким образом, частичные суммы  $S_n$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  ограничены сверху. Кроме того, они не убывают (так как ряд положителен). Следовательно, последовательность частичных сумм имеет предел, т.е. ряд сходится. При этом

$$S \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

2). Пусть теперь  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  расходится.

Принимая во внимание неравенство (\*), мы можем написать  $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx$ .

Но несобственный интеграл расходится, следовательно, интеграл  $\int_1^n f(x)dx$  неограниченно возрастает с возрастанием  $n$ . Следовательно, не ограничена сверху и последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ , т.е. ряд расходится.

**Замечание 1.** Интегральный признак допускает простое геометрическое истолкование.

Построим, например, график убывающей функции  $f(x)$  (см. рис. 1) и построим прямоугольник с основанием  $[1;2]$  и с высотами, равными  $f(1)$  и  $f(2)$ . Площади этих прямоугольников равны соответственно: первого -  $f(1)$ , второго -  $f(2)$ , а площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y=f(x)$  и прямыми  $x=1$  и  $x=2$ , равна

$\int_1^2 f(x)dx$ . Сравнивая площади построенных фигур, получаем неравенства

$$f(2) < \int_1^2 f(x)dx < f(1) \text{ (если функция невозрастающая, то неравенства могут быть и нестрогими).}$$

Аналогично иллюстрируются и остальные неравенства (см. рис.1).

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$  можно рассматривать как площадь области, ограниченной линиями  $x=1$ ,

$y=f(x), y=0$ . А ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$  представляет собой площадь всей нижней, нарисованной

сплошными линиями, ступенчатой фигуры. Сравнивая эти площади, получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx. \text{ С другой стороны } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

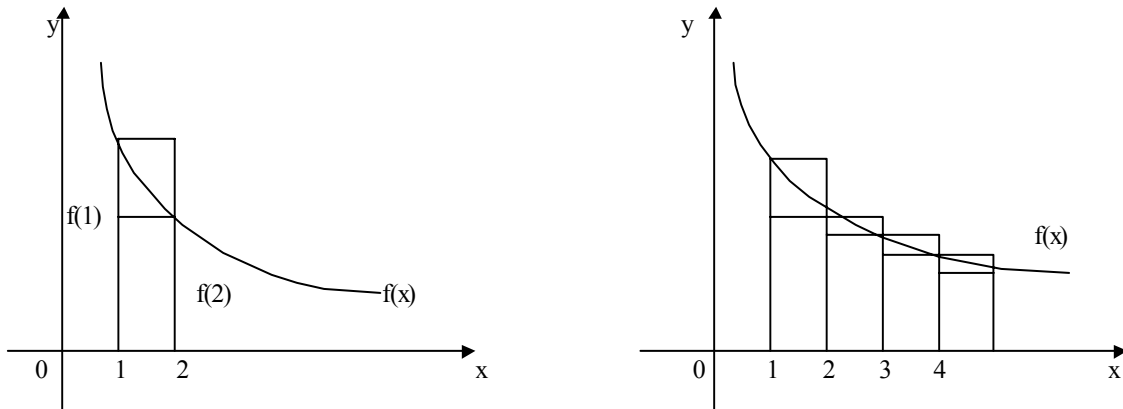


Рис. 1

Очевидно, если площадь криволинейной трапеции конечна, то и конечна площадь объединения вписанных прямоугольников и ряд сходится; если же площадь криволинейной трапеции бесконечна, то и бесконечна площадь вписанных прямоугольников, т. е. ряд расходится.

**Следствие 1.** Если  $f(x)$  – непрерывная невозрастающая неотрицательная

функция для всех  $x \geq 1$  и несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится, то  $n$ -й остаток

ряда  $f(1)+f(2)+\dots+f(n)+\dots$  не превосходит интеграла  $\int_n^{\infty} f(x) dx$ .

**Доказательство.** Из интегрального признака сходимости следует, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  сходится. Было показано, что  $f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots \leq \int_1^{\infty} f(x) dx$ .

Аналогичным образом устанавливается, что  $f(n+1) + f(n+2) + \dots \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$

для  $\forall n \geq 1$ , т.е.  $R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$ .

**Пример 1.** Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}.$$

**Решение.** Здесь  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ . В качестве функции можно принять  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ . Эта функция непрерывна, неотрицательна и монотонно убывает на промежутке  $[1; +\infty)$  для  $\alpha > 0$ . Исследуем интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  на сходимость. Легко проверить, что он сходится и равен  $\frac{1}{\alpha-1}$  для любого  $\alpha > 1$ . Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходится и его сумма не превосходит числа  $1 + \frac{1}{\alpha-1}$ . Если же  $0 < \alpha \leq 1$ , то  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  расходится и, значит, обобщенный гармонический ряд также расходится. Этим, в частности, ещё раз доказана расходимость гармонического ряда  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ , который получается из данного ряда при  $\alpha = 1$ . Итак, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$  (при  $\alpha \leq 0$  ряд расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ ).

**Замечание.** Этот пример был решен нами ранее с помощью специального признака.

### Контрольные вопросы к §2-4.

- 1) Сформулируйте критерий сходимости рядов с положительными членами.
- 2) Сформулируйте теоремы сравнения: а) не в предельной форме; б) в предельной форме.
- 3) Докажите, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  также сходится. Покажите, что обратное утверждение в общем случае неверно.
- 4) Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$ , где  $a_n$  – число, обратное членам арифметической прогрессии, расходится.
- 5) Докажите, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = q > 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.
- 6) Сформулируйте специальный признак-критерий Коши.
- 7) Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши.

8) Что можно сказать о сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

9) Какие из признаков сходимости являются достаточными, а какие необходимыми и достаточными.

### Типовые примеры к §2-4.

Рекомендуем исследования проводить по следующей схеме:

а) проверить выполнение необходимого признака сходимости;

б) в случае выполнения необходимого признака сходимости проверить один из достаточных признаков. Однако этот порядок может быть нарушен, так как для некоторых рядов проще сначала проверить выполнение пункта б), поскольку проверка необходимого признака для них затруднительна.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость следующие ряды:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ ,      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ ,      в)  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos^2 n\varphi$ ,      ( $0 < q < 1$ )

г)  $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$ ,      д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ,

**Решение.**

а) Сравнивая общий член данного ряда с общим членом расходящегося гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , убеждаемся, что  $\frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n}$  при всех значениях  $n$ . Следовательно, исследуемый ряд расходится по первому признаку сравнения.

б) Используем гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  в качестве ряда сравнения.

Найдём предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

На основании второго признака сравнения, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  расходится вместе с ря-

дом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

в) Сравним этот ряд с геометрическим рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ .

Поскольку  $0 \leq q^n \cos^2 n\varphi \leq q^n$ , на основании первого признака сравнения можно утверждать, что исследуемый ряд сходится.

Можно сказать иначе: исследуемый ряд сходится, т.к. он имеет сходящуюся мажоранту, которой является геометрический ряд.

г) Общий член ряда  $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ . Очевидно, что  $\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ .

Поэтому  $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , сходящийся геометрический, является мажорантой исследуемого ряда. Следовательно, исследуемый ряд сходится.

д) В качестве ряда сравнения выберем гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Найдём  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{n+1}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$ . Следовательно, по второму признаку сравнения, исследуемый ряд расходится.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^3 + n + 1}$ .

**Решение.** Сравним данный ряд со сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n^3 + n + 1} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{3n^3 + n + 1} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^3 + n + 1}$  тоже сходится по второму признаку сравнения.

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2 \sin^2 n}$ .

**Решение.** Так как

$$\frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2 \sin^2 n} > \frac{n^{3/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$  расходится, то данный ряд также расходится.

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt{n^2 - 4n}}$ .

**Решение.** Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt{n^2 - 4n}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{n^2 - 3} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 - 4n}} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{сле-}$$

довательно, исходный ряд расходится.

**Пример 5.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3 + 2 \cos \frac{n\pi}{2}\right)^3 \sqrt{n^2}}{\sqrt[6]{n^{11} + 10}}$

**Решение.** Так как  $|\cos x| \leq 1$ ,  $\sqrt[6]{n^{11} + 10} > \sqrt[6]{n^{11}}$ , то

$$0 < \frac{\left(3 + 2 \cos \frac{n\pi}{2}\right)^3 \sqrt{n^2}}{\sqrt[6]{n^{11} + 10}} < \frac{5^3 \sqrt{n^2}}{\sqrt[6]{n^{11}}} = \frac{5}{n^{7/6}}$$

Обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при

$\alpha \leq 1$ . Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{7/6}}$  сходится. Поэтому, исходный ряд также сходится.

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsin} \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}}$ .

**Решение.** Так как  $\operatorname{arcsin} \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}} \sim \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arcsin \frac{n}{(n^2 + 5)^{5/2}} : \frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}} : \frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(n^2 + 3)^{5/2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{5/2}} = 1$$

Кроме того, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

**Пример 7.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n - 1)}$ .

**Решение.** Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$  расходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^n}{2^n(2^n - 1)} : \left(\frac{5}{4}\right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1, \text{ то исходный ряд также}$$

расходится.

**Пример 8.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}$ .

**Решение.** Так как  $\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} > 1$  для всех  $n$ , то  $\ln \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} > 0$ , и ряд является знакоположительным.

$$\text{Далее, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + 2/n^2}{1 + 1/n^2} = 0.$$

$$\text{В силу эквивалентности } \ln \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \sim \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} - 1 = \frac{1}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, то и исходный ряд также сходится.

**Пример 9.** Исследовать ряд на сходимость следующие ряды:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(2n+1)!}, & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{n^2}, & \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}. \end{array}$$

**Решение.**

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+3} (2n+1)!}{(2n+3)! 3^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1;$$

следова-

тельно, ряд сходится по признаку Даламбера.

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^{n+1} + 1)n^2}{(n+1)^2 (3^n + 1)} = 3 > 1; \text{ значит ряд расходится по признаку}$$

Даламбера.

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ следовательно, исследуе-}$$

мый ряд сходится.

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Исследуемый ряд сходится.}$$

д) ряд расходится, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1) \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

е) Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} 3^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1, \text{ т.к.}$$

$e=2,71\dots$  . Ряд расходится.

**Пример 10.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$ .

**Решение.** Исследуем сходимость по признаку Даламбера.

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n+2)}{2^{n+1} \cdot n!},$$

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)(3(n+1)-2)}{2^{(n+1)+1} \cdot (n+1)!} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)(3n+1)}{2^{n+2} \cdot (n+1)!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)(3n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot n!}{2^{n+2} (n+1)! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1,$$

следовательно, исходный ряд расходится.

**Пример 11.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ .

**Решение.** Исследуем по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! 10^n}{10^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty, \text{ т.е. ряд расходится.}$$

**Пример 12.** Исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{n+1} \right)^n, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{n+3} \right)^{2n-1}.$$

**Решение.** По радикальному признаку Коши

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2 > 1, \quad \text{ряд расходится.}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = e^{-1} < 1, \quad \text{ряд сходится.}$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1, \quad \text{ряд сходится.}$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{2n}{n+3} \right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{n+3} \right)^{\frac{2n-1}{n}} = 4 > 1, \quad \text{ряд расходится.}$$

**Пример 13.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}$ .

**Решение.** По радикальному признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 \arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/n} \arctg^2 \frac{\pi}{4n} = 0, \quad \text{так как } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1.$$

Действительно, логарифмируя функцию  $y = x^{1/x}$ , получаем  $\ln y = \frac{\ln x}{x}$ , отсюда

$$\text{по правилу Лопитала } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

следовательно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = e^0 = 1$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1$ .

Таким образом, исходный ряд сходится.

**Пример 14.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-7}{2n+5} \right)^n$ .

**Решение.** При исследовании этого ряда применение радикального признака Коши не дает ответ на вопрос о сходимости ряда. Подбор других достаточных признаков не целесообразен, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-7}{2n+5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{\left( \frac{2n+5}{-12} \right)} \right]^{-\frac{12n}{2n+5}} = e^{-12 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5}} = e^{-6} \neq 0.$$

Таким образом, не выполнен необходимый признак сходимости ряда, следовательно, все другие исследования лишены смысла, и ряд расходится.

В связи с этим рекомендуем исследования проводить по следующей схеме:

- проверить выполнение необходимого признака сходимости;
- в случае выполнения необходимого признака сходимости проверить один из достаточных признаков. Однако этот порядок может быть нарушен, так как для некоторых рядов проще сначала проверить выполнение пункта б).

**Пример 15.** Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\ln n}{n(\ln^4 n + 1)} \right).$$

**Решение.** Исследуем по интегральному признаку Коши:

а) Так как  $f(n) = \frac{n}{n^2+3}$ , то  $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$ . Данная функция непрерывна на промежутке  $1 \leq x < \infty$  и монотонно убывает на нем. Вычислим

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^2+3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x dx}{x^2+3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+3) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln(b^2+3) - \ln 4) = \infty$$

Интеграл расходится, следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3}$  тоже расходится.

б)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ ,

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2 - 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{b-1}{b+1} \right| - \ln \frac{1}{3} \right) = \ln 3$$

Несобственный интеграл  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$  сходится, значит, ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$  тоже сходится.

в) Общий член ряда  $a_n = \frac{1}{2n(3n-1)}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2x(3x-1)}$ , т.е.  $u_n = f(n)$ .

Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x(3x-1)} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b -\frac{3x-1-3x}{2x(3x-1)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left[ -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(3x-1)} \right] dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(3x-1) \right) \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [-\ln b + \ln(3b-1) - \ln 2] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{3b-1}{2b} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

т.е. несобственный интеграл сходится, а вместе с ним сходится и исследуемый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)}.$$

г)  $a_n = \frac{\ln n}{n(\ln^4 n + 1)} = f(n)$ , тогда  $a_n = f(x)$  и  $f(x) = \left( \frac{\ln x}{x(\ln^4 x + 1)} \right)$ .

Исследуем несобственный интеграл на сходимость

$$\int_2^{\infty} \left( \frac{\ln x}{x(\ln^4 x + 1)} \right) dx = \int_2^{\infty} \frac{\ln x d \ln x}{2(\ln^4 x + 1)} = \frac{1}{2} \int_2^{\infty} \frac{d \ln^2 x}{\ln^4 x + 1} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \ln^2 x \Big|_a^{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

т.е. этот несобственный интеграл сходится, следовательно, и исходный ряд также сходится.

**Пример 16.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2 - 2) \ln 2n}$ .

**Решение.** Рассмотрим вспомогательный ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$ .

Так как функция  $f(x) = \frac{1}{x \ln 2x}$  в промежутке  $[2, +\infty)$  удовлетворяет условиям интегрального признака Коши и  $\frac{1}{n \ln 2n} = f(n)$  ( $n=2,3,4,\dots$ ), то исследование сходимости вспомогательного ряда сводится к исследованию сходимости интеграла  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln 2x}$ .

Но интеграл  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln 2x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d \ln 2x}{\ln 2x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |\ln 2x| \Big|_2^b = +\infty$ , следовательно, вспомогательный ряд расходится.

Теперь найдем предел отношения соответствующих членов исходного и вспомогательного рядов:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{(n^2 - 2) \ln 2n} : \frac{1}{n \ln 2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 \ln 2n}{(n^2 - 2) \ln 2n} = 3$ , значит, исходный ряд также расходится.

**Пример 17.** Доказать справедливость равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{(2n)!!} = 0$ . В ответе указать число  $q$ , получаемое при применении признака Даламбера или признака Коши.

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(2n)!!}$  с общим членом  $a_n = \frac{n^2 + 1}{(2n)!!}$ . Вычислим предел

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^2 + 1) \cdot (2n)!!}{(2(n+1))!! (n^2 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{2(n+1)(n^2 + 1)} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера вспомогательный ряд сходится, значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , т.е. имеет место исходное равенство.

**Ответ:**  $q = 0$ .

**Пример 18.** Доказать справедливость равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

**Доказательство.** Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$  с помощью признака Да-

ламбера:  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^{n+1} n!}{|a|^n (n+1)!} = 0$ , следовательно, по необходимому

признаку сходимости рядов, предел общего члена ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

**Пример 19.** Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a^n$ .

**Решение.** Исследуем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a^n$  по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)n! \cdot a^{n+1}}{n! \cdot (n+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \cdot a^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-\alpha}{n+1} |a|,$$

откуда заключаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a^n = 0$  при  $|a| < 1$ ,

а при  $|a| > 1$  стремится в бесконечность.

### Задания к §2-4.

После изучения §2-4 выполните задания 04 - 08 из главы 3 настоящего пособия.

## §5. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

### Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

В предыдущих параграфах подробно рассмотрены ряды с положительными членами и доказаны для них достаточные признаки сходимости. Рассмотрим теперь ряды с членами произвольного знака.

Пусть ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  (2)

имеет как положительные, так и отрицательные члены.

Примеры знакопеременных рядов:

$$1) 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$2) \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{N}.$$

**Определение 5.1.** Ряд (2) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$ , (3)

составленный из абсолютных величин соответствующих членов ряда (2).

**Теорема 5.1.** Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

**Доказательство.** Пусть ряд (2) сходится абсолютно, т.е. сходится ряд (3). Тогда для  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  такое, что при всех  $n > n_0$  и любого натурального числа  $p$   $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ . Отсюда для этих значений  $n_0$  и  $p$  имеем  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ , т.е. ряд (2) сходится согласно критерия Коши.

Теорема 5.1. формулирует достаточный признак сходимости ряда (2). То, что обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, т.е. что абсолютная сходимость требование более сильное, чем просто сходимость ряда, можно продемонстрировать на примере.

**Пример 5.1.** Ряд  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$ ,

частичные сумму которого  $S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{n+1}, & n = 2k-1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$  сходится к нулю. Вместе

с тем ряд из абсолютных величин его членов  $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots$  расходится по критерию Коши ( $p=n$ ):

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} \right| = 2 \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \right| > 2 \frac{2}{2n} = 1.$$

**Определение 5.2.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится.

Ряд из примера 5.1. - условно сходящийся.

**Пример 5.2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

**Решение.** Ряд из абсолютных величин членов этого ряда сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = 0 < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

**Определение 5.3.** Ряд (4) называется знакочередующимся, если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots \quad (4)$$

где  $a_1, a_2, \dots$  – положительные числа.

Знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n - \dots$ , отличающийся от ряда(4) только знаком, т.е. может быть получен из (4) путем умножения на (-1). Поэтому он будет обладать всеми теми же свойствами, что и ряд (4).

Для знакочередующихся рядов имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.2. (признак Лейбница).** Если члены знакочередующегося ряда (4) удовлетворяют условиям:

- 1)  $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд (4) сходится, а его сумма  $S$  не превосходит первого члена, т.е.  $S \leq a_1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим четную частичную сумму ряда (4):

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как все выражения в скобках неотрицательны, то последовательность четных частичных сумм  $(S_{2n})$  неубывающая.

Эта последовательность также ограничена сверху, т.к.

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Значит, последовательность  $(S_{2n})$  сходится. Обозначим  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ .

Запишем очевидное соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S.$$

Таким образом, сумма ряда (4) равна  $S$  и не превосходит первого члена.

**Определение 5.3.** Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 5.2. называется рядом Лейбница.

**Следствие 5.1.** Остаток ряда Лейбница  $r_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \dots)$  удовлетворяет неравенству  $|r_n| \leq a_{n+1}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим следующий ряд Лейбница:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-n-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots$$

Этот ряд только знаком отличается от остатка  $r_n$  ряда (4) и (по теореме 5.2.) не превосходит своего первого члена  $a_{n+1}$ .

Вернемся к произвольным знакопеременным рядам. Учитывая соотношения между сходимостью, условной сходимостью и абсолютной сходимостью рядов, заметим, что при исследовании знакопеременных рядов на сходимость следует придерживаться следующего плана.

1. Исследовать ряд на абсолютную сходимость, используя все достаточные признаки сходимости для знакоположительных рядов, изученные в §2-4. Возможны случаи:

а) Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, и исследование завершается

б) Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится вследствие невыполнения необходимого признака сходимости числового ряда, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, и исследование завершается.

с) Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, но необходимый признак сходимости выполняется ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ), то переходим к пункту 2.

2. Исследовать ряд на условную сходимость. Если при этом ряд является знакочередующимся, то при условии монотонного стремления к нулю последовательности  $\{ |a_n| \}$  можно использовать признак Лейбница.

**Пример 5.3.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Решение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  из абсолютных величин членов этого ряда - расходящийся гармонический. Сам же ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, исходный ряд сходится условно.

**Пример 5.4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\ln n}{n}$ .

**Решение.**

а) Исследуем на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ . По признаку сравнения  $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, следовательно, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  расходится, а потому абсолютной сходимости данного ряда нет.

б) Для исследования на условную сходимость воспользуемся признаком Лейбница:

1) Т.к.  $\left( \frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$  при  $1 - \ln x < 0$  или  $x > e$ , т.е. при  $n \geq 3$   $\{a_n\}$ -

монотонная убывающая последовательность.

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$

Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится, притом сходится условно.

**Пример 5.5.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1)^n}{n}$ .

**Решение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ , составленный из модулей членов данного ряда,

расходится по признаку Даламбера, т.к.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ .

Условия теоремы Лейбница для данного знакочередующегося ряда не выполняются, т.е. с возрастанием  $n$  модуль  $n$ -го члена ряда не стремится к нулю ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty$ ). Отсюда следует, что данный знакочередующийся ряд расходящийся.

## §6. Оценка суммы ряда.

Часто, когда вычислить точную сумму ряда не представляется возможным, ограничиваются приближенным вычислением этой суммы. Для приближенного вычисления суммы  $S$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с заданной точностью  $\delta > 0$  находят его частичную сумму  $S_n$  с таким номером  $n$ , для которого модуль суммы  $n$ -остатка не превышает заданной точности:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx S_n, \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ таково, что } |S - S_n| = |r_n| < \delta.$$

Для экономии вычислений номер  $n$  при этом стараются выбрать минимально возможным.

Наиболее просто оцениваются суммы знакочередующих рядов. Если такой ряд удовлетворяет условию признака Лейбница, то по следствию 5.1. абсолютная погрешность суммы ряда, вычисленной приближенно с помощью некоторой  $n$ -частичной суммы, не превышает модуля первого отброшенного члена ряда:

$$|S - S_n| = |r_n| \leq a_{n+1}.$$

Поэтому для обеспечения заданной точности достаточно найти такой номер  $n$ , чтобы  $a_{n+1} < \delta$ .

**Пример 6.1.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + 1}$  и вычислить приближенное значение его суммы с точностью 0,01.

**Решение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$ , составленный из модулей членов данного ряда,

сходится по признаку сравнения, в котором в качестве ряда сравнения взят ряд

Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ .

Вычислим теперь приближенно сумму исходного ряда. Для этого надо найти такой наименьший номер  $n \in \mathbb{N}$ , при котором для исследуемого ряда будет выполняться неравенство:

$$|S - S_n| < 0,01, \text{ где } S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3 + 1}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^3 + 1}.$$

Поскольку исследуемый ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям признака Лейбница ( $\frac{1}{n^3 + 1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , монотонно убываая), то

$$|S - S_n| = |r_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3 + 1}.$$

Следовательно, достаточно найти минимальное число  $n \in \mathbb{N}$ , для которого выполняется неравенство  $\frac{1}{(n+1)^3 + 1} < 0,01$ .

Имеем:  $(n+1)^3 + 1 > 100$ ;  $n+1 > \sqrt[3]{99}$ ;  $n > \sqrt[3]{99} - 1 \approx 3,6$ . Таким образом,  $n = 4$  и приближенное значение суммы ряда с точностью 0,01 равно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1} \approx S_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0,41.$$

### Контрольные вопросы к §5,6.

1. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда.
2. Что можно сказать о сходимости абсолютно сходящегося ряда? Верно ли обратное утверждение? Приведите примеры.
3. Дайте определение условно сходящегося ряда.
4. Какой ряд называется знакочередующимся?
5. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
6. Сформулируйте следствие из признака Лейбница по оценке суммы и знака знакочередующегося ряда.

## Типовые примеры к §5,6.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$ .

**Решение.** Ряд из абсолютных величин членов этого ряда сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^3}{(n+2)!} : \frac{n^3}{(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3(n+2)} = 0 < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$ .

**Решение.** Члены данного знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают  $\frac{1}{2n} > \frac{1}{2(n+1)}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ , следовательно, ряд сходится.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ , составленный из абсолютных величин членов данного ряда, получа-

ется из гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  в результате умножения всех его членов на  $1/2$ .

Гармонический ряд расходится, значит, указанный ряд также расходится.

Таким образом, исходный ряд сходится условно (неабсолютно).

**Пример 3.** Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)^2}.$$

**Решение.**

а) Составим ряд из модулей членов данного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ . Он сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем  $\alpha = 2 > 1$ . Следовательно, сходится и данный ряд, причем абсолютно.

б) Ряд составленный из модулей членов данного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$  расходится по признаку Даламбера, т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$ .

Условия теоремы Лейбница для данного знакочередующегося ряда не выполняются, т.е. с возрастанием  $n$  модуль  $n$ -го члена ряда не стремится к нулю

( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n} = \infty$ ). Отсюда следует, что данный знакочередующийся ряд расходится.

в) На основании теоремы Лейбница ряд сходится, если 1) абсолютная величина его членов монотонно убывает и 2) общий член ряда

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{(3n-1)^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Оба эти требования выполнены, ряд сходится.

Чтобы решить вопрос об абсолютной сходимости ряда рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}, \text{ составленный из абсолютных величин членов исходного ряда.}$$

Признак Даламбера не даёт ответа на вопрос, т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , не работает и

признак Коши, т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

Применим интегральный признак Коши.

Общий член ряда  $u_n = \frac{1}{(3n-1)^2}$  можно рассматривать как значение функции

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2} \text{ при } x = n, \text{ которая удовлетворяет необходимым требованиям для } x > \frac{1}{3}.$$

Вычислим интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3(3x-1)} \right) \Big|_1^b = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3b-1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6},$$

т.е. интеграл сходится и, следовательно, исследуемый ряд сходится абсолютно.

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 + n + 1}$ .

**Решение.** Т.к. функция синус – знакопеременная, то и данный ряд - знакопеременный.

Рассмотрим ряд из модулей общих членов, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2 + n + 1}$ .

Этот знакоположительный ряд сходится по признакам сравнения:

$\frac{|\sin n|}{n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n^2 \left(1 + 1/n + 1/n^2\right)} \sim \frac{1}{n^2}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  — является сходящимся.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно.

**Пример 5.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n + 4}$ .

**Решение.** Необходимое условие сходимости данного ряда выполняется, т.к.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln n + 4} \right| = 0$ . Рассмотрим ряд из модулей с общим членом  $\frac{1}{\ln n + 4}$ . По при-

знакам сравнения (с учетом того, что для  $n \geq 1$   $\ln n < n$ ) этот ряд расходится:

$\frac{1}{\ln n + 4} = \frac{1}{\ln n (1 + 4/\ln n)} \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ , а гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  — является расхо-

дящимся.

Таким образом, у исходного ряда нет абсолютной сходимости.

Исследуем условную сходимость исходного ряда, для чего проверяем выполнение условий теоремы Лейбница.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n + 4} = 0$ ,  $\frac{1}{\ln n + 4} > 0$ ,

и для любого  $n \geq 1$   $\ln n < \ln(n + 1)$ ,  $\ln n + 4 < \ln(n + 1) + 4$ , и, следовательно,

$\frac{1}{\ln n + 4} > \frac{1}{\ln(n + 1) + 4}$ , что и означает монотонное убывание последовательности.

Таким образом, исходный ряд сходится, и сходится условно.

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

**Решение.**

а) Исследуем на абсолютную сходимость, для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин нашего ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

$\left| (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}} \right| = \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ , т.к.  $\operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  сходится, а данный ряд сходится абсолютно.

**Пример 7.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

**Решение.** Исследуем сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ . Этот ряд расходится по второму признаку сравнения. Поэтому исследуем его сходимость, используя достаточные признаки условной сходимости. Перепишем общий член ряда в виде  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n-1}$ .

Тогда ряд распадается на два:  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n-1}$ , из которых первый сходится по признаку Лейбница, а второй расходится. Следовательно, расходится и данный ряд.

**Пример 8.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ .

**Решение.** Общий член не стремится к нулю. Следовательно, ряд расходится.

**Пример 9.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n}$ .

**Решение.** Начинаем исследовать на абсолютную сходимость.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$ .

Для выяснения сходимости этого ряда применим признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{100} \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^{100}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{100}}{2n^{100}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

**Пример 10.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ .

**Решение.** Начнем исследование с выяснения абсолютной сходимости ряда, т.е. определим сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ . Этот ряд расходится по второму признаку сравнения.

К исходному ряду применим признак Лейбница. По этому признаку должны иметь:

а) последовательность  $\{a_n\}$ , монотонно убывая, стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} \text{ для всех } n$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0.$$

Проверим условие монотонности. Для этого рассмотрим  $a_n$  как некоторую функцию  $f(x)$  и продифференцируем ее

$$\left( \frac{\sqrt{x}}{x+100} \right)' = \frac{x+100-2x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} < 0 \text{ при } x > 100, \text{ т.е. общий}$$

член ряда стремится к нулю монотонно. Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  сходится условно.

**Пример 11.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{n}}$ .

**Решение.** Начнем исследование с выяснения абсолютной сходимости ряда,

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{n}}$ . Этот ряд расходится, по второму

признаку сравнения. Применяя признак Лейбница (т.к. ряд знакочередующийся) утверждаем, что ряд сходится условно, предварительно проверив монотонность стремления к нулю последовательности  $\{a_n\}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{n}} = 0 \left( \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{x}} \right)' = \frac{-x^2 + 200x + 1}{(x+1)^2 \cdot 100x^{100}} < 0 \text{ при } x > 201.$$

**Пример 12.** Вычислить сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}$  с точностью  $\alpha = 0,001$ .

**Решение.** Ряд, составленный из модулей членов данного ряда, сходится по при-

знаку сравнения, в котором в качестве ряда сравнения взят ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ .

Данный ряд типа Лейбница, так как:

1) он знакопеременный;

2) последовательность  $\left(\frac{n}{(1+n^3)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$  — убывающая, так как

$$y' = \left(\frac{x}{(1+x^3)^2}\right)' < 0 \text{ на } [1, +\infty);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{(5+4n)^3} = 0.$$

Если в качестве суммы исходного ряда взять сумму первых  $n-1$  членов, то ошибка вычисления суммы ряда по абсолютной величине не превосходит числа

$$a_n = \frac{n}{(1+n^3)^2}.$$

Так как  $a_4 = \frac{4}{(1+4^3)^2} = \frac{4}{4225} < 0,001$ ,  $a_3 = \frac{3}{(1+3^3)^2} = \frac{3}{784} > 0,001$ , то с точностью

0,001 имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2} \approx \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{81} - \frac{3}{784} + \frac{4}{4225} \approx$$

$$\approx -0,2500 + 0,0246 - 0,0038 + 0,0009 = -0,2283 \approx -0,228.$$

**Пример 13.** Вычислите сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{(5+4n)^3}$  с точностью до  $10^{-3}$ .

**Решение.** Ряд сходится абсолютно (ряд модулей сравним с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ).

Данный ряд типа Лейбница, так как:

1) он знакопеременный;

2) последовательность  $\left(\frac{n+3}{(5+4n)^3}\right)_{n=1}^{\infty}$  – убывающая, так как  $x_n - x_{n-1} > 0$ ,

т.е.  $\frac{n+3}{(5+4n)^3} - \frac{n+4}{(9+4n)^3} > 0$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$  или  $y' = \left(\frac{x+3}{(5+4x)^3}\right)' < 0$  на  $[1, +\infty]$ ;

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{(5+4n)^3} = 0$ . Тогда модуль  $n$ -ого остатка ряда не превосходит модуля

первого члена этого остатка и имеет его знак (следствие из теоремы Лейбница).

$$\text{При } n = 2 \quad \left. \frac{n+3}{(5+4n)^3} \right|_{n=2} = \frac{5}{13^3} = \frac{5}{2197} > 10^{-3};$$

$$\text{при } n = 3 \quad \left. \frac{n+3}{(5+4n)^3} \right|_{n=3} = \frac{6}{17^3} = \frac{6}{4913} > 10^{-3};$$

$$\text{при } n = 4 \quad \left. \frac{n+3}{(5+4n)^3} \right|_{n=4} = \frac{7}{21^3} = \frac{7}{9261} \cong 0,00076.$$

Тогда

$$S \approx -0,0049 - 0,0012 + 0,0023 \approx -0,004.$$

**Ответ:**  $-0,004$ .

### Задания к §5,6.

После изучения §5,6 выполните заданий 10,11 из главы 3 настоящего пособия.